JURNAL FOURIER | April 2019, Vol. 8, No. 1, 15-18 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2019.81.15-18 E-ISSN 2541-5239

Image (*Pre-image*) Homomorfisme *Interior* Subgrup *Fuzzy*

Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat, Jl. A. Yani Km 36 Banjarbaru Kalimantan Selatan 70714, Indonesia.

Korespondensi; Email: saman@ulm.ac.id

Abstrak

Dalam makalah ini, akan diperkenalkan notasi image (pre-image) di bawah homomorfisma grup, dan akan dibuktikan image (pre-image) interior subgrup fuzzy (interior subgrup) di bawah homomorfisma grup selalu interior subgrup fuzzy (interior subgrup).

Kata Kunci: Image; pre-image; interior subgrup; interior subgrup fuzzy; homomorfisma grup

Abstract

In this paper, we will introduce the image (pre-image) under the group homomorphism, and we will prove the image (pre-image) of the interior of the fuzzy subgroup (the interior of the subgroup) under the group homomorphism is always the interior of the fuzzy subgroup (the interior of the subgroup).

Keywords: Image; pre-image; interior subgroup; fuzzy interior subgroup; group homomorphism

Pendahuluan

Setelah himpunan *fuzzy* dipublikasikan Zadeh (Zadeh, 2015), beberapa peneliti mengeksplorasi gagasan himpunan *fuzzy,* diantaranya Rosenfeld (Rosenfeld, 1971) menerapkannya pada teori dasar grupoid dan grup sehingga muncul definisi grupoid *fuzzy* dan subgrup *fuzzy*, Kuroki (Kuroki, 1982) menerapkannya pada struktur semigrup dan mendefinisikan semigrup *fuzzy* dan interior ideal *fuzzy* pada semigrup, Jeyaraman (Jeyaraman, 2010) menerapkannya pada homomorfisma dan anti homomorfisma grup, dan Abdurrahman[5] mendefinisikan interior subgrup *fuzzy* yang diinduksi dari definisi yang dibangun Kuroki (Kuroki, 1982).

Pada makalah ini, akan diperkenalkan definisi *image* dan *pre-image* dari interior subgrup *fuzzy* di bawah suatu homomorfisma grup, dan akan menyelidiki sifat dari *image* dan *pre-image* dari interior subgrup *fuzzy* (interior subgrup) jika dikenakan suatu homomorfisma grup.

Landasan Teori

Suatu Himpunan G tidak kosong (Hotta, 2018) disebut sebagai grup, jika pada G diberikan suatu operasi biner, dan elemen-elemen pada G terhadap operasi biner tersebut dipenuhi sifat asosiatif, memuat elemen identitas, dan setiap elemen mempunyai invers. Lebih lanjut (Lal, 2017) subset tidak kosong S dalam G disebut subgrup jika untuk setiap $a, b \in S$ dipenuhi $ab^{-1} \in S$.

Definisi 2.1. (Mordeson, 2011; Ajmal & Jahan, 2012; Talebi, 2018) *Subset fuzzy dari himpunan tidak kosong* X *didefinisikan sebagai suatu fungsi dari* X *ke interval tutup* $[0, 1]$. *Selanjutnya keluarga subset fuzzy dari* X *dinotasikan dengan* $\mathbb{F}(X)$.

Definisi 2.2. (Das, 1981) *Misalkan δ adalah subset fuzzy dari X. Untuk $t \in [0,1]$, himpunan $\delta_t =: \{x \in X \mid \delta(x) \geq t\}$ disebut level subset dari subset fuzzy δ.*

Definisi 2.3. (Rosenfeld, 1971; Ajmal & Jahan, 2012; Bejines et al, 2018) *Subset fuzzy δ dari suatu grup G merupakan subgrup fuzzy dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $\delta(xy) \geq min\{\delta(x), \delta(y)\}$, dan $\delta(x^{-1}) \geq \delta(x)$.*

Definisi 2.4. (Jeyaraman, 2010; Kim & Kim, 1996) *Misalkan $\delta \in \mathbb{F}(X)$ dan $\sigma \in \mathbb{F}(Y)$ dengan f adalah fungsi dari X ke Y. Didefinisikan subset fuzzy $f_\delta \in \mathbb{F}(Y)$ dan $f_\sigma^{-1} \in \mathbb{F}(X)$ berturut-turut sebagai berikut:*

$$f_\delta(y) = \begin{cases} sup\{\delta(x) | x \in X, & f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & & lainnya \end{cases}$$

untuk setiap $y \in Y$, dan $f_\sigma^{-1}(x) = \sigma[f(x)]$ untuk setiap $x \in X$.
Selanjutnya f_δ disebut ***image*** *dari δ di bawah f, dan f_σ^{-1} disebut* ***preimage*** *dari σ di bawah f.*

Definisi 2.5. (Abdurrahman, 2018) *Subgrup H dari grup G disebut interior dari G jika untuk setiap $x, y \in G$ dan $h \in H$ maka $xhy \in H$.*

Definisi 2.6. (Abdurrahman, 2018) *Misalkan G grup dan $\delta \in \mathbb{F}(G)$. Subset fuzzy δ adalah interior subgrup fuzzy dari G jika δ adalah subgrup fuzzy dari G dan $\delta(xdy) \geq \delta(d)$ untuk setiap $x, d, y \in G$.*

Hasil Analisis Data dan Pembahasan

Teorema 3.1. *Preimage homomorfisma grup dari suatu interior subgrup fuzzy adalah interior subgrup fuzzy.*

Bukti: Misalkan $f : K \longrightarrow H$ adalah suatu homomorfisma grup, dengan σ adalah interior subgrup *fuzzy* di grup H, dan f_σ^{-1} adalah *preimage* dari σ di bawah f. Akan dibuktikan f_σ^{-1} adalah interior subgrup *fuzzy* di grup K.

Diambil sebarang $p, q, k \in K$ maka

$$\begin{aligned} f_\sigma^{-1}(pq^{-1}) &= \sigma\{f(pq^{-1})\} \\ &= \sigma\{f(p)f(q^{-1})\} \\ &= \sigma\{f(p)[f(q)]^{-1}\} \\ &\geq \min\{\sigma[f(p)], \sigma[f(q)]\} \\ &= \min\{f_\sigma^{-1}(p), f_\sigma^{-1}(q)\}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f_\sigma^{-1}(pkq) &= \sigma[f(pkq)] \\ &= \sigma[f(p)f(k)f(q)] \\ &\geq \sigma[f(k)] \\ &= f_\sigma^{-1}(k). \end{aligned}$$

Jadi, f_σ^{-1} adalah interior subgrup *fuzzy* di grup K, dengan kata lain *Preimage* homomorfisma grup dari suatu interior subgrup *fuzzy* adalah interior subgrup *fuzzy.* ■

Berikut ini diberikan definisi *subset fuzzy* yang mempunyai sifat sup, yang akan mendukung pada pembuktian teorema berikutnya.

Definisi 3.2. (Kumar, 1991) *Subset fuzzy δ pada suatu grup G dikatakan mempunyai sifat sup, jika untuk setiap subset H dari G, terdapat $h_0 \in H$ sedemikian hingga $\delta(h_0) = \sup_{h \in H} \delta(n)$*

Teorema 3.3. *Image homomorfisma grup dari suatu interior subgrup fuzzy dengan sifat sup adalah interior subgrup fuzzy.*

Bukti: Misalkan K dan H adalah grup, dan $f: K \longrightarrow H$ adalah suatu homomorfisma grup, dengan δ adalah interior subgrup *fuzzy* di K dengan sifat sup, dan f_δ adalah *image* dari δ di bawah f. Akan dibuktikan f_δ adalah interior subgrup *fuzzy* di H.

Diambil sebarang $a, b, c \in f(K)$, maka ada $a_0, b_0, c_0 \in K$ sedemikian hingga $a_0 = f^{-1}(a), b_0 = f^{-1}(b)$, dan $c_0 = f^{-1}(c)$ dengan

$$\delta(a_0) = \sup_{d \in f^{-1}(a)} \delta(d), \qquad \delta(b_0) = \sup_{d \in f^{-1}(b_0)} \delta(d), \qquad \text{dan } \delta(c_0) = \sup_{d \in f^{-1}(c)} \delta(d)$$

Menurut yang diketahui f_δ adalah *image* dari δ di bawah *f*, maka

$$\begin{aligned} f_\delta(ac^{-1}) &= \sup_{d \in f^{-1}(ac^{-1})} \delta(d) \\ &\geq \delta(a_0 c_0^{-1}) \\ &\geq \min\{\delta(a_0), \delta(c_0)\} \\ &= \min\{\sup_{d \in f^{-1}(a)} \delta(d), \sup_{d \in f^{-1}(c)} \delta(d)\} \\ &= \min\{f_\delta(a), f_\delta(c)\}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f_\delta(abc) &= \sup_{d \in f^{-1}(abc)} \delta(d) \\ &\geq \delta(a_0 b_0 c_0) \\ &\geq \delta(\mathrm{b}_0) \\ &= \sup_{d \in f^{-1}(b_0)} \delta(d) \\ &= f_\delta(b). \end{aligned}$$

Jadi, f_δ adalah interior subgrup *fuzzy* di H. ■

Akibat 3.4. *Image epimorfisma grup dari suatu interior subgrup fuzzy dengan sifat sup adalah interior subgrup fuzzy.*

Lemma 3.5. *Jika $f: G \longrightarrow H$ adalah suatu epimorfisma grup, dan δ adalah interior subgrup fuzzy di G, maka image homomorfisma $\delta^\star = \{x \in G \mid \delta(x) = \delta(e_G)\}$ adalah interior subgrup di H.*

Bukti: Mengingat δ adalah interior subgrup *fuzzy* di G, maka menurut Abdurrahman (Abdurrahman, 2018, Lemma 3.9), $\delta^\star$ adalah interior subgrup di G. Akan ditujukkan $f(\delta^\star)$ adalah interior subgrup di H.

Diambil sebarang $m, r \in f(\delta^\star)$ maka terdapat $a, c \in \delta^\star$ sedemikian hingga $f(a) = m$ dan $f(c) = r$. Karena $\delta^\star$ adalah subgrup di G, dan f suatu homomorfisma, maka $ac^{-1} \in \delta^\star$ yang mengakibatkan $f(ac^{-1}) \in f(\delta^\star)$, yaitu $f(ac^{-1}) = f(a)f(c^{-1}) = f(a)[f(c)]^{-1} = mr^{-1}$, dengan kata lain $f(\delta^\star)$ adalah subgrup di H. Selanjutnya, diambil sebarang $x, s \in H$ dan $d \in f(\delta^\star)$. Mengingat f suatu epimorfisma dan $\delta^\star$ adalah interior subgrup di G, maka ada $p, r \in G$ dan $q \in \delta^\star$, yaitu $x = f(p), d = f(q)$, $s = f(r)$, dan $pqr \in \delta^\star$ yang mengakibatkan $f(pqr) = f(p)f(q)f(r) = \mathrm{xds} \in f(\delta^\star)$.

Berdasarkan analisa di atas diperoleh lain $f(\delta^\star)$ adalah subgrup di H, dan $xds \in f(\delta^\star)$ untuk setiap $x, s \in H$ dan $d \in f(\delta^\star)$, maka menurut Definisi 2.5, $f(\delta^\star)$ interior subgrup di H. ■

Lemma 3.6. *Jika $f: G \longrightarrow H$ adalah suatu homomorfisma grup, dan σ adalah interior subgrup fuzzy di H, maka pre-image homomorfisma $\sigma^{\star} = \{h \in H \mid \sigma(h) = \sigma(e_H)\}$ adalah interior subgrup di G.*

Bukti: Pembuktian $\sigma^{\star}$ adalah interior subgrup di H, sejalan dengan bukti Teorema 3.5. Akan ditujukkan $f^{-1}(\sigma^{\star})$ adalah interior subgrup di G.

Diambil sebarang a dan z di $f^{-1}(\sigma^{\star})$, maka ada $b, w \in \sigma^{\star}$ sedemikian hingga $f(a) = b$ dan $f(z) = w$. Mengingat $\sigma^{\star}$ merupakan subgrup di H, dan f suatu homomorfisma, maka $bw^{-1} \in \sigma^{\star}$ yang mengakibatkan $bw^{-1} = f(a)[f(z)]^{-1} = f(a)f(z^{-1}) = f(az^{-1}) \Leftrightarrow az^{-1} \in f^{-1}(bw^{-1})$.
Dengan kata lain $f^{-1}(\sigma^{\star})$ adalah subgrup di G.

Selanjutnya, diambil sebarang $b, n \in G$ dan $z \in f^{-1}(\sigma^{\star})$, maka $f(b), f(n) \in H$ dan $f(z) \in \sigma^{\star}$. Mengingat $\sigma^{\star}$ adalah interior subgrup di H , dan *f* suatu homomorfisma, maka

$$f(bzn) = f(b)f(z)f(n) \in \sigma^{\star} \Leftrightarrow bzn \in f^{-1}(\sigma^{\star}),$$

yang mengakibatkan $f^{-1}(\sigma^{\star})$ adalah interior subgrup di G. ■

Kesimpulan

Hasil penting yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah, *image* dan *pre-image* homomorfisma grup dari interior subgrup *fuzzy* (interior grup) adalah interior subgrup *fuzzy* (interior grup).

Referensi

[1] **L. A. Zadeh**, 2015, Fuzzy logic - A personal perspective, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 281, pp. 420.
[2] **A. Rosenfeld**, 1971. Fuzzy groups, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 35, no. 3, pp. 512517.
[3] **N. Kuroki**, 1982, Fuzzy Semiprime Ideals in Semigroup, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 8, no. 1, pp. 7179.
[4] **K. Jeyaraman**, 2010. The Homomorphism and Anti-Homomorphism of Level Subgroups of Fuzzy Subgroups, *Int. Math. Forum*, vol. 5, no. 46, pp. 22932298.
[5] **S. Abdurrahman**, 2018, Interior Subgrup Fuzzy, *J. Fourier*, vol. 7, no. 1, pp. 1321.
[6] **S. Hotta**, 2018, Introductory Group Theory, in *Mathematical Physical Chemistry: Practical and Intuitive Methodology*, Singapore: Springer Singapore, pp. 445456.
[7] **R. Lal**, 2017. **Group** Theory, in *Algebra 1: Groups, Rings, Fields and Arithmetic*, Singapore: Springer Singapore, pp. 93143.
[8] **J. N. Mordeson**, 2011. Zadehs influence on mathematics, *Sci. Iran.*, vol. 18, no. 3 D, pp. 596601.
[9] **N. Ajmal and I. Jahan**, 2012, A study of normal fuzzy subgroups and characteristic fuzzy subgroups of a fuzzy group, *Fuzzy Inf. Eng.*, vol. 4, no. 2, pp. 123143.
[10] **A. A. Talebi**, 2018, Cayley fuzzy graphs on the fuzzy groups, *Comput. Appl. Math.*, pp. 122.
[11] **P. S. Das**, 1981. Fuzzy groups and level subgroups, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 84, no. 1, pp. 264269.
[12] **C. Bejines, M. Jesus Chasco, J. Elorza, and S. Montes**, 2018, On the Preservation of an Equivalence Relation Between Fuzzy Subgroups, vol. 641, pp. 159167.
[13] **S. D. Kim and H. S. Kim**, 1996. On Fuzzy Ideals of Near-Ring, *Bull Korean Math. Soc*, vol. 33, no. 4, pp. 593601.
[14] **R. Kumar**, 1991, Homomorphisms and fuzzy (fuzzy normal) subgroups, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 44, no. 1, pp. 165168.