

Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Chikungunya Dengan Dua Jenis Nyamuk Aedes (*Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus*)

Farida Amanati dan Muhammad Wakhid Musthofa

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia

Korespondensi; Farida Amanati, Email: amanatifarida@gmail.com

Abstrak

Demam Chikungunya adalah penyakit yang disebabkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus*. Pengobatan untuk demam Chikungunya hanya dengan pengobatan secara simptomatik yaitu hanya mengurangi gejalanya saja seperti penurunan panas, gejala nyeri sendi. Dalam tulisan ini mempelajari tentang model matematika penyebaran virus Chikungunya dengan dua jenis Nyamuk *Aedes* pembawa virus Chikungunya berdasarkan asumsi – asumsi yang telah dibuat. Dalam model ini dihasilkan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik, *basic reproduction ratio*, dan analisis kestabilan model di sekitar titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium dijelaskan secara analisis dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi diberikan sebagai bentuk pendekatan model terhadap nilai – nilai parameter yang diberikan.

Kata Kunci: Demam Chikungunya; model matematika; basic reproduction ratio; titik ekuilibrium; kriteria Routh-Hurwitz

Abstract

Chikungunya fever is a disease caused by *Aedes Aegypti* and *Aedes Albopictus* mosquitoes. Treatment for Chikungunya fever only with symptomatic treatment that only reduces symptoms such as fever, painful joint symptoms. In this paper learn about the mathematical model of Chikungunya virus spread with two types of *Aedes* mosquito carrying Chikungunya virus based on assumptions that have been made. In this model the resulting disease-free endemic ends, the basic reproduction ratio, and the model stability analysis around the equilibrium point. The stability of the equilibrium point is explained analytically by using Routh-Hurwitz criteria. The simulation is given as a model approach to the given parameter values.

Keywords: Chikungunya fever, mathematical model, basic reproduction ratio, equilibrium point, Routh-Hurwitz criterion

Pendahuluan

Demam Chikungunya adalah suatu jenis penyakit menular yang disebabkan oleh virus Chikungunya (CHIK) yang termasuk dalam famili *Togaviridae*, genus *Alphavirus*. Penyebaran virus ini dapat ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes* yaitu *Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus* (Depkes RI, 2003). Penyakit demam Chikungunya menyerang semua usia, baik usia anak dewasa maupun lanjut usia. Virus CHIK menyerang manusia dan hewan, namun nyamuk *Aedes* ini lebih menyukai darah manusia dari pada binatang (Suripstiasuti, 2007).

Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan bentuk kerangka model matematika dan memformulasikan ke dalam persamaan matematika setiap vektor penyebar demam Chikungunya. Beberapa konsep yang dipakai dalam penelitian ini adalah operasi matriks, ruang vektor, nilai eigen dan vektor eigen, persamaan diferensial, integral, sistem dinamik, titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium, matriks jacobian, linearisasi sistem, kriteria Routh-Hurwitz, *basic reproduction ratio*. Konsep konsep tersebut bermanfaat untuk menyelesaikan masalah di dunia nyata.

Berdasarkan uraian diatas maka penulis tertarik untuk mengangkat jurnal Model Matematika Penyebaran Penyakit Demam Chikungunya dengan Dua Jenis Nyamuk *Aedes* (*Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus*).

Berdasarkan latar belakang diatas maka permasalahan yang timbul adalah a). Bagaimana model matematika pada penyebaran penyakit demam Chikungunya b). Bagaimana cara melakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium keseimbangan c). Bagaimana cara melakukan simulasi model.

Pembahasan

Gejala umum yang terkena demam Chikungunya adalah demam mendadak tinggi biasanya sampai 39°C - 40°C , menggigil, muka kemerahan, mual, muntah, nyeri kepala dan timbul bintik bintik kemerahan terutama di daerah badan. Gejala khas dari demam Chikungunya yaitu nyeri sendi terutama di sendi siku, lutut, pergelangan tangan dan kaki yang berlangsung beberapa hari sampai satu minggu (Suharto, 2003).

Demam Chikungunya termasuk *Self Limiting Disease* atau penyakit yang sembuh dengan sendirinya. Belum ada vaksin maupun obat khusus untuk penyakit ini. Pengobatan yang diberikan hanya dengan menghilangkan segala gejalanya yaitu dengan menggunakan obat turunkan panas dan obat penghilang rasa ngilu. Nyamuk *Aedes* lebih menyukai darah manusia dari pada binatang. Darahnya diperlukan untuk mematangkan telur jika dibuahi oleh nyamuk jantan sehingga menetas (Suriptiastuti, 2007). Virus Chikungunya ditularkan dari orang sakit demam Chikungunya ke orang sehat melalui gigitan nyamuk *Aedes Aegypti* (Depkes RI, 2003).

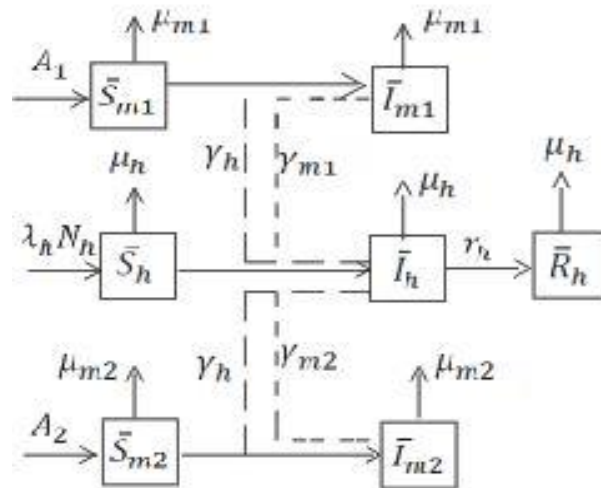
Penularan Chikungunya ditularkan melalui tusukan nyamuk *Aedes Aegypti* atau *Aedes Albopictus*. Nyamuk dapat menjadi berpotensi menularkan penyakit bila pernah menusuk penderita demam Chikungunya. Nyamuk yang terinfeksi virus Chikungunya akan menularkan penyakit bila menusuk yang sehat. Chikungunya bersifat sporadis artinya di berbagai tempat timbul serangan berskala kecil, misalnya mengenai beberapa desa, sehingga penyebaran tidak merata. Meskipun penyakit ini tidak menyebabkan kematian, akan tetapi sangat meresahkan masyarakat karena penularan virus ini dapat menyebarkan dengan cepat pada masyarakat sekitar dalam waktu singkat (Depkes RI, 2008). Oleh karena itu perlu diupayakan pengendalian penyebaran virus Chikungunya secara baik.

Model Matematika Penyebaran Demam Chikungunya

Berdasarkan penjabaran informasi tentang demam Chikungunya yang ada selanjutnya diberikan asumsi asumsi dalam pembentukan model. Berikut asumsi asumsi yang dibuat dalam pembentukan modelnya

- Total populasi manusia konstan.
- Total populasi nyamuk *Aedes* (*Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus*) konstan.
- Laju kelahiran dan laju kematian dianggap sama.
- Dalam satu wilayah hanya terdapat populasi manusia dan nyamuk.
- Populasi nyamuk dalam satu wilayah yang membawa virus Chikungunya yaitu *Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus*.
- Setiap individu yang terdapat pada populasi memiliki kemungkinan tergigit
- Tingkatan gigitan nyamuk terinfeksi lebih tinggi dari pada nyamuk rentan.
- Individu nyamuk yang terkena virus tidak dapat disembuhkan.
- Virus Chikungunya dapat ditularkan dari orang sakit (individu terinfeksi) kepada orang sehat (individu rentan) melalui gigitan nyamuk.
- Terjadi penyembuhan dari individu terinfeksi, yang kemudian tidak kembali lagi ke kelas rentan.

Model yang mendekati informasi - informasi yang ada dan asumsi yang diberikan adalah Model matematika penyebaran penyakit demam chikungunya dengan dua jenis nyamuk *Aedes*. Digram transnsfernya diberikan pada gambar 1.



Gambar 1 Diagram Transfer Penyebaran Demam Chikungunya dengan Dua Jenis Nyamuk Aedes (*Aedes Aegypti* dan *Aedes Albopictus*).

Populasi manusia dibagi menjadi tiga bagian yaitu populasi manusia kelas rentan dilambangkan dengan ($\bar{S}_h$), populasi manusia kelas terinfeksi dilambangkan dengan ($\bar{I}_h$), populasi manusia kelas sembuh dilambangkan dengan ($\bar{R}_h$).

Populasi nyamuk pembawa virus Chikungunya dibagi menjadi dua kelas yaitu nyamuk pada kelas rentan dan nyamuk pada kelas terinfeksi. Populasi nyamuk *Aedes Aegypti* pada kelas rentan dilambangkan dengan ($\bar{S}_{m1}$), populasi nyamuk *Aedes Albopictus* pada kelas rentan dilambangkan dengan ($\bar{S}_{m2}$). Populasi nyamuk *Aedes Aegypti* pada kelas terinfeksi dilambangkan dengan ($\bar{I}_{m1}$), Populasi nyamuk *Aedes Albopictus* pada kelas terinfeksi dilambangkan dengan ($\bar{I}_{m2}$).

Total populasi manusia dilambangkan dengan N_h . Total populasi nyamuk dilambangkan dengan N_m yaitu jumlah total dari populasi nyamuk *Aedes Aegypti* (N_{m1}) dan populasi nyamuk *Aedes Albopictus* (N_{m2}).

Parameter parameter yang digunakan yaitu μ_h sebagai laju kematian manusia, μ_{m1} sebagai laju kematian nyamuk *Aedes Aegypti*, μ_{m2} sebagai laju kematian nyamuk *Aedes Albopictus*. λ_h sebagai laju kelahiran manusia. A_1 sebagai laju perekrutan nyamuk *Aedes Aegypti*. A_2 sebagai laju perekrutan nyamuk *Aedes Albopictus*. γ_h sebagai laju transmisi virus Chikungunya dari manusia pada nyamuk *Aedes*. γ_{m1} sebagai laju transmisi virus Chikungunya dari nyamuk *Aedes Aegypti* pada manusia. γ_{m2} sebagai laju transmisi virus Chikungunya dari nyamuk *Aedes Albopictus* pada manusia. r_h sebagai laju penyembuhan manusia.

Model matematika dari diagram transfer diatas merupakan sistem persamaan diferensial biasa dengan 7 variabel yaitu $\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{R}_h, \bar{S}_{m1}, \bar{I}_{m1}, \bar{S}_{m2}, \bar{I}_{m2}$. Sistem persamaan diferensial dari gambar 1 tersebut diberikan di bawah ini

$$\frac{d\bar{S}_h}{dt} = \lambda_h N_h - (\gamma_{m1} \bar{I}_{m1} + \gamma_{m2} \bar{I}_{m2}) \bar{S}_h - \mu_h \bar{S}_h \quad (1a)$$

$$\frac{d\bar{I}_h}{dt} = (\gamma_{m1} \bar{I}_{m1} + \gamma_{m2} \bar{I}_{m2}) \bar{S}_h - \mu_h \bar{I}_h - r_h \bar{I}_h \quad (1b)$$

$$\frac{d\bar{R}_h}{dt} = r_h \bar{I}_h - \mu_h \bar{R}_h \quad (1c)$$

$$\frac{d\bar{S}_{m1}}{dt} = A_1 - \gamma_h \bar{I}_{m1} \bar{S}_{m1} - \mu_{m1} \bar{S}_{m1} \quad (1d)$$

$$\frac{d\bar{I}_{m1}}{dt} = \gamma_h \bar{I}_h \bar{S}_{m1} - \mu_{m1} \bar{I}_{m1} \quad (1e)$$

$$\frac{d\bar{S}_{m2}}{dt} = A_2 - \gamma_h \bar{I}_{m2} \bar{S}_{m2} - \mu_{m2} \bar{S}_{m2} \quad (1f)$$

$$\frac{d\bar{I}_{m2}}{dt} = \gamma_h \bar{I}_h \bar{S}_{m2} - \mu_{m2} \bar{I}_{m2} \quad (1g)$$

Dari persamaan diatas terdapat persamaan (1c), (1d), (1f) dihapus dengan asumsi bahwa populasi manusia dan nyamuk adalah konstan, serta $\bar{R}_h = N_h - \bar{S}_h - \bar{I}_h$, $\bar{S}_{m1} = N_{m1} - \bar{I}_{m1}$, $\bar{S}_{m2} = N_{m2} - \bar{I}_{m2}$. Jumlah variabel dependen (yang memepengaruhi atau terikat) diturunkan menjadi empat,, yaitu S_h , I_h , I_{m1} , I_{m2} . Untuk menganalisis model dengan menormalkan persamaan (1a-1g) dan mendefinisikan variabel baru pada persamaan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{\bar{S}_h}{N_h}, I_h = \frac{\bar{I}_h}{N_h}, R_h = \frac{\bar{R}_h}{N_h} \\ S_{m1} &= \frac{\bar{S}_{m1}}{N_{m1}} = \frac{\bar{S}_{m1}}{A_1/(\mu_{m1})}, I_{m1} = \frac{\bar{I}_{m1}}{N_{m1}} = \frac{\bar{I}_{m1}}{A_1/(\mu_{m1})} \\ S_{m2} &= \frac{\bar{S}_{m2}}{N_{m2}} = \frac{\bar{S}_{m2}}{A_2/(\mu_{m2})}, I_{m2} = \frac{\bar{I}_{m2}}{N_{m2}} = \frac{\bar{I}_{m2}}{A_2/(\mu_{m2})} \end{aligned} \quad (2a)$$

Karena total populasi manusia dan nyamuk konstan, kemudian laju perubahan populasi manusia selama selang waktu sama dengan zero, diperoleh persamaan $\frac{d\bar{S}_h}{dt} + \frac{d\bar{I}_h}{dt} + \frac{d\bar{R}_h}{dt} = 0$

$\gamma_{h \rightarrow m1}$ (γ_{m1}) adalah tingkat penularan virus chikungunya dari manusia terinfeksi ke populasi nyamuk *Aedes Aegepty* yang rentan. Tingkat gigitan nyamuk (b) yang kemungkinan bahwa akan tertular virus chikungunya dari populasi manusia ke populasi nyamuk *Aedes Aegepty* yaitu $b\beta_{h \rightarrow m1}$ dibagi dengan total populasi nyamuk (N_m).

$$\gamma_{h \rightarrow m1} = \frac{b\beta_{h \rightarrow m1}}{N_m} \quad (2b)$$

$\gamma_{h \rightarrow m2}$ (γ_{m2}) adalah tingkat penularan virus chikungunya dari manusia terinfeksi ke populasi nyamuk *Aedes Albopictus* yang rentan. Tingkat gigitan nyamuk (b) yang kemungkinan bahwa akan tertular virus chikungunya dari populasi manusia ke populasi nyamuk *Aedes Albopictus* yaitu $b\beta_{h \rightarrow m2}$ dibagi dengan total populasi nyamuk (N_m).

$$\gamma_{h \rightarrow m2} = \frac{b\beta_{h \rightarrow m2}}{N_m} \quad (2c)$$

Diasumsikan bahwa tingkat transmisi (penularan) virus chikungunya dari populasi manusia terinfeksi ke populasi kedua nyamuk adalah sama.

$$\gamma_{h \rightarrow m1} = \gamma_{h \rightarrow m2} = \gamma_h \text{ dan } N_m = N_{m1} + N_{m2} \quad (2d)$$

Model yang diturunkan adalah menggambarkan persamaan yang dirinci sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h(1 - S_h) - \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/(\mu_{m1}))I_{m1}S_h - \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/(\mu_{m2}))I_{m2}S_h \quad (3a)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/(\mu_{m1}))I_{m1}S_h + \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/(\mu_{m2}))I_{m2}S_h - (\mu_h + r_h)I_h \quad (3b)$$

$$\frac{dI_{m1}}{dt} = \gamma_h I_h N_h (1 - I_{m1}) - \mu_{m1} I_{m1} \quad (3c)$$

$$\frac{dI_{m2}}{dt} = \gamma_h I_h N_h (1 - I_{m2}) - \mu_{m2} I_{m2} \quad (3d)$$

Analisa Model

Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Suatu keadaan dimana titik tidak terjadi penyebaran virus dalam populasi. Titik ekuilibrium dapat dicari dengan cara turunan pertamanya atau persamaan (3a) (3d) sama dengan nol. Untuk keadaan ini pada saat $I_h = 0$, $I_{m1} = 0$, $I_{m2} = 0$.

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai berikut $E_0 = (1,0,0,0)$.

Titik Ekuilibrium Endemik

Suatu keadaan dimana titik terjadi keseimbangan pada saat penyebaran virus di dalam populasi, dengan keadaan $I_h \neq 0$, $I_{m1} \neq 0$, $I_{m2} \neq 0$. Sehingga diperoleh titik titiknya di bawah ini

$$I_h^* = \frac{M_2 P_1 + M_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad I_{m1}^* = \frac{M_2 P_1 + M_1 P_2}{M_2 P_1 + M_1 P_2 + M_1 (P_1 + P_2)}, \quad I_{m2}^* = \frac{M_2 P_1 + M_1 P_2}{M_2 P_1 + M_1 P_2 + M_2 (P_1 + P_2)},$$

$$S_h^* = \frac{M_{11} M_{22}}{N_{11} M_{22} + M_{11} N_{22} + M_{11} M_{22}}.$$

Dengan:

$$P_1 = \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1}{\mu_h \mu_{m1}}, \quad P_1 = \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2}{\mu_h \mu_{m2}}, \quad M_1 = \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h}}{N_h \gamma_h}, \quad M_2 = \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h}}{N_h \gamma_h},$$

$$M_{11} = M_1 P_2 + M_2 P_1 + M_1 (P_1 + P_2), \quad M_{22} = M_1 P_2 + M_2 P_1 + M_2 (P_1 + P_2)$$

$$N_{11} = P_1 (P_1 M_2 + M_1 P_2), \quad N_{22} = P_2 (P_1 M_2 + M_1 P_2).$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemiknya yaitu $E_1 = (S_h^*, I_h^*, I_{m1}^*, I_{m2}^*)$.

Basic Reproduction Ratio

Basic reproduction ratio atau disebut bilangan reproduksi dasar, dinotasikan dengan R_0 , merupakan suatu ukuran potensi penyebaran dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi dan selama terinfeksi berlangsung. R_0 mempunyai nilai batas 1, sehingga jika : a). $R_0 < 1$ maka individu yang terinfeksi oleh penyakit kemungkinan tidak ada dalam populasi b). $R_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi ada dalam populasi atau penyakit akan menyebar ke populasi.

Metode yang digunakan untuk menentukan nilai R_0 adalah metode matriks generasi berikutnya (*next generation method*). Selanjutnya R_0 didefinisikan sebagai radius spektral dari matriks generasi berikutnya (Driessche dan Watmough, 2002). Dimulai dengan

$$\dot{x} = F(x) - V(x) \quad (4)$$

Didefinisikan matriks F merupakan matriks infeksi baru pada populasi. Kemudian didefinisikan matriks perpindahan individu dari kelas yang satu ke kelas yang lain dimibolkan dengan V . x merupakan matriks yang dikonstruksi dari sub sub populasi (S_h, I_h, I_{m1}, I_{m2}) yang menyebabkan infeksi saja.

$$X = \begin{bmatrix} S_h \\ I_h \\ I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} (A_1 / (\mu_{m1})) I_{m1} S_h}{N_h} + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} (A_2 / (\mu_{m2})) I_{m2} S_h}{N_h} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -\mu_h + \mu_h S_h + \gamma_{m1 \rightarrow h} (A_1 / (\mu_{m1})) I_{m1} S_h + \gamma_{m2 \rightarrow h} (A_2 / (\mu_{m2})) I_{m2} S_h \\ (\mu_h + r_h) I_h \\ -\gamma_h I_h N_h + \gamma_h I_h N_h I_{m1} + \mu_{m1} I_{m1} \\ \gamma_h I_h N_h + \gamma_h I_h N_h I_{m2} + \mu_{m1} I_{m2} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya $A = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(E) \right], B = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(E) \right]$ untuk semua $i, j = 1, 2, 3, 4$ adalah matriks jacobian F pada saat E dan V pada saat E .

Radius spektral dari matriks generasi berikutnya AB^{-1} merupakan bilangan reproduksi dasar untuk sistem (4) pada titik ekuilibrium E sehingga diperoleh $R_0 = \rho(AB^{-1})$, nilai eigen non-negatif dari matriks AB^{-1} yaitu *radius spektral*.

Untuk model diatas , matriks jacobian diperoleh

$$A(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/(\mu_{m1})) & \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/(\mu_{m2})) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(E_0) = \begin{bmatrix} \mu_h & 0 & \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/\mu_{m1}) & \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/\mu_{m2}) \\ 0 & r_h + \mu_h & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_h N_h & \mu_{m1} & 0 \\ 0 & -\gamma_h N_h & 0 & \mu_{m2} \end{bmatrix}$$

Matriks invers pada $B(E_0)$

$$B^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_h} & -\frac{\gamma_h N_h \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/\mu_{m1})}{\mu_h(r_h + \mu_h)\mu_{m1}} & -\frac{\gamma_h N_h \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/\mu_{m2})}{\mu_h(r_h + \mu_h)\mu_{m2}} & -\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/\mu_{m1})}{\mu_h \mu_{m1}} & -\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/\mu_{m2})}{\mu_h \mu_{m2}} \\ 0 & \frac{1}{r_h + \mu_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_h N_h}{\mu_{m1}(r_h + \mu_h)} & \frac{1}{\mu_{m1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_h N_h}{\mu_{m2}(r_h + \mu_h)} & 0 & \frac{1}{\mu_{m2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma_h N_h \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/\mu_{m1})}{(r_h + \mu_h)\mu_{m1}} & -\frac{\gamma_h N_h \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/\mu_{m2})}{(r_h + \mu_h)\mu_{m2}} & \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/\mu_{m1})}{\mu_{m1}} & \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/\mu_{m2})}{\mu_{m2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kemudian diperoleh nilai eigen non negatif dari matriks $AB^{-1}(E_0)$ yaitu $\rho(AB^{-1}(E_0))$, artinya $R_0 = \frac{\gamma_h N_h \gamma_{m1 \rightarrow h}(A_1/\mu_{m1})}{(r_h + \mu_h)\mu_{m1}} + \frac{\gamma_h N_h \gamma_{m2 \rightarrow h}(A_2/\mu_{m2})}{(r_h + \mu_h)\mu_{m2}}$.

Teorema 1

Diberikan E_0 merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit dari sitem $\dot{x} = f(x)$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil aismtotik, jika $R_0 = \rho(AB^{-1}(E_0)) < 1$ dan tidak stabil jika $\rho(AB^{-1}(E_0)) > 1$.

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan dari suatu titik ekuilibrium dapat dilihat dari nilai eigennya. Nilai eigen dapat dicari dari persamaan karakteristik (Anton H, 2004) yang merupakan dari determinan matriks jacobian (Olsder, 1994).

Matriks jacobian dari sistem persamaan diferensial (3a) (3d) disekitar titik ekulibrium.

Teorema 2

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ dengan suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$

- Titik ekuilibrium E dikatakan stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika bagian real $\lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
- Titik ekuilibrium E dikatakan stabil jika dan hanya jika bagian real $\lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
- Titik ekuilibrium E dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu bagian real $\lambda_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

Matriks jacobian model matematika penyebaran demam Chikungunya disekitar titik ekulibrium bebas penyakit E_0 adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & -\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1}{\mu_{m1}} & -\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2}{\mu_{m2}} \\ 0 & -(r_h + \mu_h) & \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1}{\mu_{m1}} & \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2}{\mu_{m2}} \\ 0 & \gamma_h N_h & -\mu_{m1} & 0 \\ 0 & \gamma_h N_h & 0 & -\mu_{m2} \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan menyelesaikan $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$. Sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda + \mu_h)(\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3) = 0$$

dengan,

$$\begin{aligned} a_1 &= r_h + \mu_h + \mu_{m1} + \mu_{m2} \\ a_2 &= (r_h + \mu_h)(\mu_{m1} + \mu_{m2}) + \mu_{m1} \mu_{m2} - \frac{\gamma_h N_h \gamma_{m1 \rightarrow h} A_1}{\mu_{m1}} - \frac{\gamma_h N_h \gamma_{m2 \rightarrow h} A_2}{\mu_{m2}} \\ a_3 &= (r_h + \mu_h)(\mu_{m1} + \mu_{m2}) + \mu_{m1} \mu_{m2} - \frac{\gamma_h N_h \gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 \mu_{m2}}{\mu_{m1}} - \frac{\gamma_h N_h \gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 \mu_{m1}}{\mu_{m2}} \end{aligned}$$

Salah satu nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 = -\mu_h$, sehingga $\lambda_1 > 0$. Untuk tiga nilai eigen yang lain adalah solusi persamaan kubik. Tiga nilai eigen dari persamaan tersebut bernilai negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz (Olsder, 1994) akan stabil asimtotiki lokal ketika koefisien diatas memenuhi kondisi

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3.$$

Matriks jacobian model matematika penyebaran demam Chikungunya disekitar titik ekulibrium Endemik E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} - \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}} & 0 & -\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 S_h^*}{\mu_{m1}} & -\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 S_h^*}{\mu_{m2}} \\ \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}} & -(r_h + \mu_h) & \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 S_h^*}{\mu_{m1}} & \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 S_h^*}{\mu_{m2}} \\ 0 & \gamma_h N_h - \gamma_h N_h I_{m1}^* & -\gamma_h N_h I_h^* - \mu_{m1} & 0 \\ 0 & \gamma_h N_h - \gamma_h N_h I_{m2}^* & 0 & -\gamma_h N_h I_h^* - \mu_{m2} \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan menyelesaikan $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$. Sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0$$

dengan,

$$b_1 = r_h + 2\mu_h + \mu_{m1} + \mu_{m2} + 2\gamma_h N_h I_h^* + \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= (\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*)(\mu_{m1} + r_h + \mu_h + \gamma_h N_h I_h^*)(r_h + \mu_h)(\mu_{m1} + \gamma_h N_h I_h^*) \\
&\quad - (\gamma_h N_h)(1 - I_{m1}^*) \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 S_h^*}{\mu_{m1}} \right) - (\gamma_h N_h)(1 - I_{m2}^*) \left(\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 S_h^*}{\mu_{m2}} \right) + (\mu_h + \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} \\
&\quad + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}}) (r_h + \mu_h + \mu_{m1} + \mu_{m2} + 2\gamma_h N_h I_h^*) \\
b_3 &= (r_h + \mu_h)(\mu_{m1} + \gamma_h N_h I_h^*)(\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*) - (\mu_{m1} + \gamma_h N_h I_h^*)(\gamma_h N_h)(1 - I_{m2}^*) \left(\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 S_h^*}{\mu_{m2}} \right) - \\
&\quad (\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*)(\gamma_h N_h)(1 - I_{m1}^*) \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 S_h^*}{\mu_{m1}} \right) - (\mu_h + \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} \\
&\quad + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}}) \times \left\{ -(\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*)(\mu_{m1} + r_h + \mu_h + \gamma_h N_h I_h^*) - (r_h + \mu_h)(\mu_{m1} + \right. \\
&\quad \left. \gamma_h N_h I_h^*) + (\gamma_h N_h) \left[(1 - I_{m2}^*) \left(\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 S_h^*}{\mu_{m2}} \right) + (1 - I_{m1}^*) \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 S_h^*}{\mu_{m1}} \right) \right] \right\} - \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}} \right) (\gamma_h N_h) \left[(1 - I_{m2}^*) \left(\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 S_h^*}{\mu_{m2}} \right) + (1 - I_{m1}^*) \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 S_h^*}{\mu_{m1}} \right) \right] \\
b_4 &= -(\mu_h + \frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}}) \left\{ -(r_h + \mu_h)(\mu_{m1} + \gamma_h N_h I_h^*)(\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*) + \right. \\
&\quad \left. \gamma_h N_h S_h^* \left[(1 - I_{m1}^*)(\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*) \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1}{\mu_{m1}} \right) + (1 - I_{m2}^*)(\mu_{m1} + \gamma_h N_h I_h^*) \left(\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2}{\mu_{m2}} \right) \right] \right\} - \\
&\quad \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1 I_{m1}^*}{\mu_{m1}} + \frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2 I_{m2}^*}{\mu_{m2}} \right) \gamma_h N_h S_h^* \left[(1 - I_{m1}^*)(\mu_{m2} + \gamma_h N_h I_h^*) \left(\frac{\gamma_{m1 \rightarrow h} A_1}{\mu_{m1}} \right) + (1 - I_{m2}^*)(\mu_{m1} + \right. \\
&\quad \left. \gamma_h N_h I_h^*) \left(\frac{\gamma_{m2 \rightarrow h} A_2}{\mu_{m2}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Untuk empat nilai eigen adalah solusi persamaan karakteristiknya. Empat nilai eigen dari persamaan tersebut bernilai negatif dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz (Olsder, 1994), akan stabil asimtotiki lokal ketika koefisien koefisien diatas memenuhi kondisi

$$b_1 > 0, b_3 > 0, b_4 > 0, b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4.$$

Simulasi Model

Simulasi dilakukan untuk memberikan nilai nilai untuk masing masing parameter sesuai dengan kondisi R_0 dan kestimbangan ekuilibrium E

Dengan teorema yang telah diberikan diatas. Simulasi dilakukan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema kestabilan titik ekuilibrium.

Berikut ini tabel nilai-nilai parameter model untuk penyebaran penyakit demam Chikungunya

Table 1 Nilai-nilai parameter model untuk penyebaran penyakit demam Chikungunya.

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
μ_h	$1/65 \times 365$	$\gamma_{m2 \rightarrow h}$	0,003
N_h	20000	γ_h	0,00001
A_1	90	r_h	0,5
A_2	100	μ_{m1}	$1/5$
$\gamma_{m1 \rightarrow h}$	0,0002	μ_{m2}	$1/7$

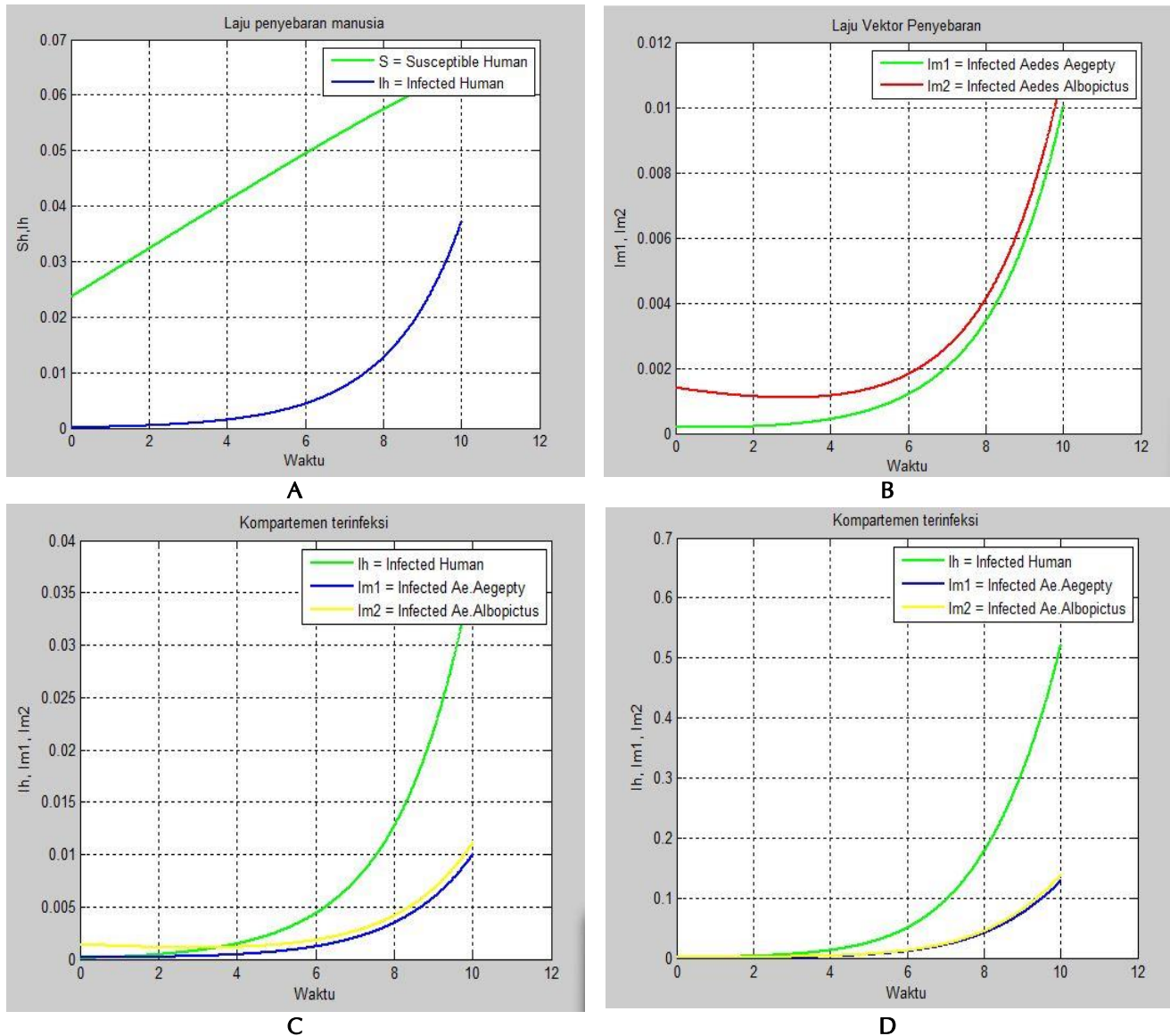
Nilai R_0 pada Teorema 1 disebutkan bahwa $R_0 < 1$ maka stabil asimtotik. Pada teorema 2 disebutkan titik ekuilibrium stabil asimtotik jika dan hanya jika bagian real dari setiap nilai eigen $\lambda_i < 0$.

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit, salah satu nilai eigennya yaitu $\lambda_1 = -0,0004$. Untuk nilai eigen yang lain memenuhi kondisi kriteria Routh-Hurwitz yaitu $a_1 = 0,84757 > 0$, $a_3 = 0,08657 > 0$, $a_1 a_2 = 0,162988 > 0,08657 = a_3$. Sehingga akar akar persamaan karakteristik

tersebut bernilai negatif, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik. Sedangkan nilai $R_0 = 0,00055$, menurut teorema 1 $R_0 < 1$ maka stabil.

Kestabilan titik ekuilibrium endemik untuk nilai eigen yang memenuhi kondisi kriteria Routh-Hurwitz yaitu $b_1 = 0,855123 > 0$, $b_3 = 0,0984627 > 0$, $b_4 = 0,00529 > 0$ $b_1 b_2 b_3 = 1,449938 > 0,74622 = b_3^2 + b_1^2 b_4$. Sehingga akar akar persamaan karakteristik tersebut bernilai negatif, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik.

Gambar grafik dibawah ini menunjukkan penyebaran penyakit Chikungunya.



Gambar 2 A. Populasi Individu Kelas Rentan dan Terinfeksi; B. Laju vektor Penyebaran Infeksi kelas Nyamuk *Aedes*; C. Jumlah Individu kelas terinfeksi; D. Jumlah Individu kelas terinfeksi $A_1 = 500$ dan $A_2 = 1000$.

Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil yaitu Tingkat penyebaran virus Chikungunya yang paling berpotensi untuk mentransfer ke populasi manusia yaitu nyamuk *Aedes Albopictus*. Wabah dari penyakit Chikungunya akan hilang dengan berjalannya waktu dan pada saat $R_0 < 1$ dengan kondisi tertentu

wabah dari penyakit Chikungunya tidak akan hilang dalam hal populasi masih ada individu yang terinfeksi penyakit Chikungunya.

Referensi

- [1] Anton, H. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Edisi Kedelapan*. Jakarta : Erlangga
- [2] Depkes RI. 2003. *Pencegahan dan Penanggulangan Penyakit Demam Chikungunya dan Demam Berdarah Dengue*. Jakarta : Depkes RI. (<http://www.depkes.go.id>), diakses pada 10 Oktober 2015
- [3] Depkes RI. 2008. *Chikungunya Tidak Menyebabkan Kematian atau Kelumpuhan*. Jakarta: Depkes RI. (<http://www.depkes.go.id>), diakses pada 10 Oktober 2015.
- [4] Driessche Van den .P Watmough. 2002. *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission vol: 29- 48*. Canada: Elseiver (Mathematical Biosciences).
- [5] Joko P, M Kharis, Wuryanto. 2012. *Model Matematika pada Penyakit Chikungunya dengan Menggunakan Treatment pada Individu yang Sakit*. Semarang: UNNES Juornal of Mathematics.
- [6] Naowarat Surapol, Ming. I Tang. 2013. *Transmission Model Of Chikungunya FeverIn The Presence Of Two Species Of Aedes Mosquitoes*. USA: Science Publication.
- [7] Olsder G.J,Van Der Woude. 1994. *Mathematical System Theory*. Belanda: Deflt University Press
- [8] Perko, Lawrwnce. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. NewYork: Springer-Verlag
- [9] Purcell, Varberg. 2008. *Kalkulus Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- [10] Ross, Shepley. L. 1984. *Introduction to Ordionary Differential Equations*. USA: John Wiley and Sons.
- [11] Santoso, Fitri. 2011. *Analisis Faktor yang Berhubungan dengan Kejadian Chikungunya di wilayah Kerja Puskesmas Gunungpati Kota Semarang Tahun 2010*. Semarang: UNNES.
- [12] Suharto. 2003. *Chikungunya Pada Orang Dewasa*. Surabaya: Airlangga University Press.
- [13] Suriptiastuti. 2007. *Re-emergence of Chikungunya Epidemiology and Roles of Vektor in Tranmission of The Disease [Vol 26 - No,2]*. Universitas Trisakti: Universa Mecina.
- [14] Sutimin, Widowati. 2007. *Bahan Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: UNDIP