Penyelesaian Matching Graf Dengan Menggunakan Metode Hungarian dan Penerapannya Pada Penempatan Karyawan di Suatu Perusahaan

Aulia Rahman, Muchammad Abrori, dan Noor Saif Muhammad Musafi

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia

Korespondensi; Noor Saif Muhammad Mussafi, Email: om_norsa@yahoo.com

Abstrak

Semakin meningkatnya kompetisi global menuntut setiap perusahaan untuk meningkatkan kualitas serta efektifitas kinerja karyawannya yang pada akhirnya diharapkan dapat meningkatkan keuntungan. Penempatan sejumlah X karyawan pada Y pekerjaan dimana masing-masing karyawan mempunyai kompetensi untuk menyelesaikan semua pekerjaan dengan mempertimbangkan beberapa aspek seperti memaksimalkan keuntungan yang diperoleh atau meminimalkan waktu yang diperlukan sebagai akibat dari penempatan X karyawan pada Y pekerjaan dikenal dengan Optimal Assignment Problem. Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mencari solusi pada Optimal Assignment Problem dimana aspek yang akan dioptimalkan adalah keuntungan dari penempatan sejumlah n karyawan pada n pekerjaan yang dapat diperoleh dengan menerapkan konsep teori graf. Dalam hal ini permasalahan dinyatakan sebagai graf bipartit khususnya graf bipartit lengkap berbobot yang menerapkan konsep matching, yaitu pencarian matching sempurna dengan bobot paling optimal. Untuk mencari matching sempurna dengan bobot paling optimal maka dapat digunakan sebuah algoritma optimasi yaitu metode Hungarian. Dengan menggunakan metode Hungarian, diperoleh matching sempurna dengan bobot yang optimal pada graf bipartit lengkap berbobot. Matching dikatakan sempurna jika telah memenuhi semua himpunan simpul X dan Y. Matching yang dihasilkan merupakan solusi dari Optimal Assignment Problem yakni memasangkan seorang karyawan tepat satu dengan sebuah pekerjaan dan bobotnya menyatakan keuntungan optimal yang akan diperoleh oleh suatu perusahaan.

Kata Kunci: Pencocokan; Masalah penugasan optimal; Metode Hungarian

Abstract

The increasing global competition requires every company to improve the quality and effectiveness of its employees performance which ultimately is expected to increase profits. The placement of a number of X employees at Y jobs where each employee has the competence to complete all the work by considering several aspects such as maximizing the profit earned or minimizing the time required as a result of the employee X placement on Y work is known as the Optimal Assignment Problem. The purpose of this paper is to find a solution on the Optimal Assignment Problem where the aspect to be optimized is the advantage of the placement of a number of n employees on job n which can be obtained by applying the concept of graph theory. In this case the problem is expressed as bipartite graphs, especially full weighted bipartite graphs that apply matching concepts, ie perfect matching search with the most optimal weight. To find perfect matching with the most optimal weights can be used an optimization algorithm is the Hungarian method. Using the Hungarian method, obtained perfect matching with optimal weight in complete weighted bipartite graphs. Matching is said to be perfect if it has met all the set of node X and Y. Matching resulted is a solution of Optimal Assignment Problem that is to pair an employee exactly one with a job and weighted declared the optimal profit to be obtained by a company.

Keywords: Matching; Optimal Assignment Problem; Hungarian Method

Pendahuluan

Pada dasarnya pencarian *matching* sempurna dengan bobot maksimal dapat dilakukan dengan mendaftar semua *matching* sempurna yang berbeda dan menghitung jumlah bobot dari setiap *matching* sempurna yang diperoleh. Banyaknya *matching* sempurna yang berbeda pada suatu graf bipartit lengkap dengan n simpul pada masing-masing partisinya adalah sebanyak $n!$ cara. Sangat tidak efisien jika cara ini digunakan, karena semakin banyak jumlah simpul maka semakin banyak pula *matching* sempurna yang berbeda. Untuk memudahkan pencarian solusi *matching* sempurna dengan bobot maksimal, dapat digunakan sebuah algoritma optimasi yaitu metode Hungarian.

Metode Hungarian adalah sebuah algoritma kombinasional untuk optimasi, yang dapat digunakan untuk menemukan solusi optimal dari masalah penempatan karyawan. Versi awalnya, yang dikenal dengan metode Hungarian, ditemukan dan dipublikasikan oleh Harold Kuhn pada tahun 1955. Algoritma ini kemudian diperbaiki oleh James Munkres pada tahun 1957. Oleh karena itu, algoritma ini kemudian dikenal juga dengan nama algoritma KuhnMunkres. Pada penelitian ini akan dibahas metode Hungarian untuk menyelesaikan *matching* pada graf bipartit lengkap berbobot dimana masalah yang ingin dipecahkan adalah mencari solusi terbaik maksimum pada penempatan karyawan. Keuntungan terbesar penggunaan metode Hungarian adalah kompleksitas algoritmanya yang polynomial. Metode yang digunakan dalam algoritma Hungarian dalam memecahkan masalah sangat sederhana dan mudah dipahami.

Penempatan Karyawan

Dalam suatu perusahaan sering muncul permasalahan, salah satunya adalah penempatan karyawan (tenaga ahli) pada suatu pekerjaan sehingga penempatan tersebut merupakan penempatan yang optimal. Penempatan tenaga kerja merupakan suatu usaha untuk menyalurkan kemampuan sumber daya manusia sebaik-baiknya dengan jalan menempatkan karyawan pada pekerjaan yang paling sesuai. Pelaksanaan penempatan karyawan yang tepat akan tercipta, manakala kemampuan bekerja dari pegawai sudah sesuai dengan standar yang dibutuhkan untuk melakukan pekerjaan yang dipercayakan kepadanya. Keputusan mengenai penempatan dimaksudkan untuk menempatkan orang yang tepat pada posisi yang tepat.

Penempatan karyawan di suatu perusahaan merupakan salah satu kasus atau permasalahan dalam *Optimal Assignment Problem*, yaitu merupakan masalah menempatkan sejumlah n pekerja $(x_1, x_2, x_3, x_{4,} \dots., x_n)$ untuk menyelesaikan n pekerjaan $(y_1, y_2, y_3, y_{4,} \dots, y_n)$, dalam hal ini jumlah anggota himpunan X maupun Y diasumsikan sama. Dalam masalah *Optimal Assignment Problem* sejumlah tugas atau *assignment* akan diberikan kepada sejumlah penerima tugas atau *assignee* dalam basis satu-satu dengan memperhatikan faktor tertentu seperti memaksimalkan keuntungan atau meminimalkan kerugian. Dalam hal ini yang dimaksud dengan kerugian adalah biaya dan waktu sedangkan yang dimaksud dengan keuntungan adalah pendapatan atau laba. Data pokok pertama yang harus dimiliki dalam menyelesaikan suatu masalah penugasan atau penempatan karyawan adalah jumlah *assignee* dan jumlah *assignment*.

Masalah penempatan karyawan dapat dimodelkan dengan menggunakan graf bipartit lengkap berbobot $G = (X, Y)$, dimana X adalah merupakan himpunan karyawan dan Y adalah merupakan himpunan pekerjaan. Sisi-sisi yang menghubungkan antara X dan Y adalah menyatakan hubungan antara karyawan dengan pekerjaan tersebut. Dalam hal ini aspek yang akan dioptimalkan adalah bobot atau peluang penempatan tiap X karyawan pada Y pekerjaan, dimana bobot masing-masing karyawan berbeda karena tingkat keterampilan, pengalaman kerja dan latar belakang pendidikan.

Contoh 1:

Sebuah perusahaan distro mempunyai 5 pekerjaan yang berbeda yaitu:

Pekerjaan I : Memproduksi jaket
Pekerjaan II : Memproduksi rok
Pekerjaan III : Memproduksi hem
Pekerjaan IV : Memproduksi baju safari
Pekerjaan V : Memproduksi celana panjang.

Pekerjaan-pekerjan tersebut akan diselesaikan oleh 5 karyawan dimana setiap karyawan mempunyai tingkat ketrampilan, pengalaman kerja dan latar belakang pendidikan yang berbeda. Jumlah produk yang dihasilkan masing-masing karyawan berbeda tiap bulannya, sehingga produktifitas atau keuntungan yang timbul dari berbagai alternatif penugasan dari ke-5 karyawan tersebut juga berbeda. Akan ditentukan solusi agar masing-masing karyawan menepati posisi pekerjaan, sehingga menjadi penempatan paling optimal bagi perusahaan. Jumlah produk yang dihasilkan masing-masing karyawan setiap bulannya dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

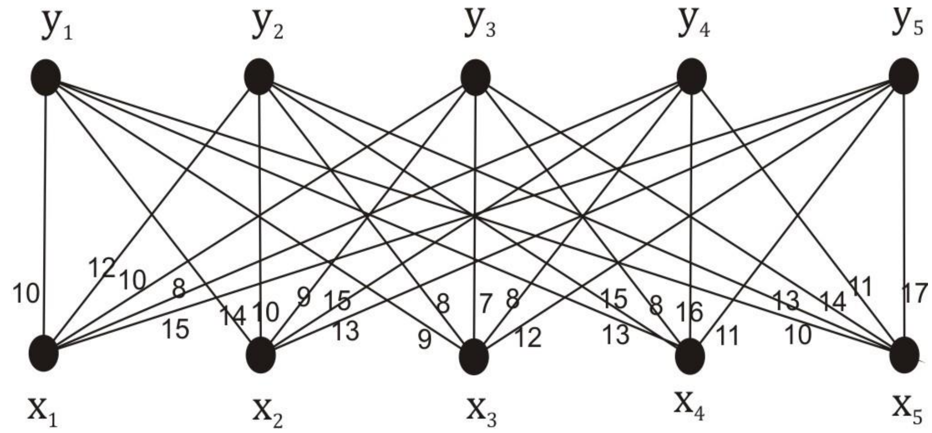
Tabel 1 Tngkat ketrampilan pekerjaan masing-masing karyawan.

Karyawan	Pekerjaan				
	I	II	III	IV	V
Afif	10	12	10	8	15
Bady	14	10	9	15	13
Dzaky	9	8	7	8	12
Faras	13	15	8	16	11
Ghazy	10	13	14	11	17

Penyelesaian:
Untuk menyelesaikan permasalahan di atas, setiap karyawan dan setiap pekerjaan dapat dinotasikan sebagai berikut:

x_1	= Afif	y_1	= Pekerjaan I
x_2	= Bady	y_2	= Pekerjaan II
x_3	= Dzaki	y_3	= Pekerjaan III
x_4	= Faras	y_4	= Pekerjaan IV
x_5	= Ghazy	y_5	= Pekerjaan V

Tabel 1 dapat diilustrasikan dengan graf bipartit $K_{5,5}$ berbobot dengan partisi himpunan simpul $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ seperti pada gambar 1 berikut ini:



Gambar 1 Graf dari ilustrasi penempatan karyawan.

Untuk mencari solusi optimal dari penempatan karyawan sama halnya dengan mencari *matching* sempurna dengan bobot maksimum pada graf bipartit pada gambar 1. Karena graf G merupakan graf bipartit lengkap yang memiliki partisi $\{X, Y\}$ dengan $|X| = |Y|$ dan $|S| \leq |\, N_G(S)|$ ($S \subseteq X$ atau Y), berdasarkan teorema *marriage* yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, maka pada graf bipartit ini terdapat *matching* sempurna. Dalam hal ini karena $|X| = |Y| = 5$, maka dapat ditentukan kemungkinan *matching* sempurnanya sebanyak $5!$ = 120.

Pada dasarnya pencarian *matching* sempurna dengan bobot maksimal dapat dilakukan dengan mendaftar semua *matching* sempurna yang berbeda, dan menghitung jumlah bobot dari tiap *matching* sempurna yang diperoleh. Dalam masalah ini, karena kemungkinan *matching* sebanyak 120, pencarian solusi dengan mendaftar semua *matching* sempurna yang mungkin pada graf bipartit tersebut sangat tidak efisien untuk digunakan. Oleh karena itu, untuk memudahkan pencarian solusi dari penempatan karyawan tersebut, akan digunakan sebuah metode optimasi yaitu metode Hungarian. Sebelum menguraikan langkah-langkah dalam metode Hungarian, akan didefinisikan terlebih dahulu *feasible labelling* dan *equality subgraph*.

Feasible Labelling

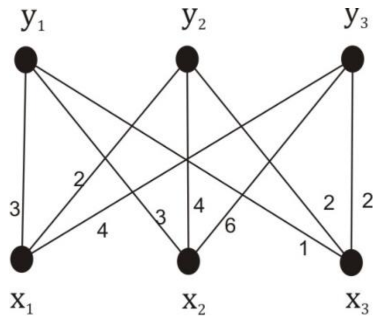
Misalkan terdapat suatu graf bipartit lengkap G dengan bobot w yang dinotasikan dengan (G, w). *Feasible labelling* pada graf G didefinisikan sebagai fungsi nilai real ℓ pada $X \cup Y$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$ berlaku:

$$\ell(x) + \ell(y) \geq \mathrm{w}(x, y)$$

Salah satu cara untuk menemukan *feasible labelling* adalah dengan mendefinisikan semua $\ell(y) = 0$ untuk $y \in Y$ dan untuk setiap $x \in X$, ambil bobot maksimum pada sisi yang bersisian dengan *x*.

$\forall y \in \mathrm{Y}, \ell(y) = 0$ untuk $y \in \mathrm{Y}$ $\forall x \in \mathrm{X}, \ell(x)$
$\max_{\mathrm{y \in Y}}\{\mathrm{w}(x, y)\}$ untuk $x \in \mathrm{X}$

Contoh 2:



Gambar 2 Graf bipartit lengkap berbobot.

Akan ditentukan *feasible labelling* dari graf bipartit berbobot pada gambar 2. Diperoleh matriks ketetanggaan yang bersesuaian dengan gambar 2 adalah:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari penjelasannya sebelumnya salah satu cara untuk menemukan *feasible labelling* adalah dengan mendefinisikan semua $\ell(y) = 0$ untuk $y \in Y$ dan untuk setiap $\in X$, ambil bobot maksimum pada sisi yang bersisian dengan x.

$\forall y \in Y, \ell(y) = 0$ untuk $y \in Y$
$\forall x \in X, \ell(\mathrm{x}) = \max_{\mathrm{y \in Y}}\{\mathrm{w(x, y)}\}$ untuk $x \in X$

Dalam hal ini untuk mendefinisikan $\ell(y) = 0$ untuk $y \in Y$, dapat dilakukan dengan menuliskan angka 0 dibawah matriks untuk masing-masing y seperti pada matriks berikut ini:

$y_1 \quad y_2 \quad y_3$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Selanjutnya untuk mendefinisikan $\forall \mathrm{x} \in X, \ell(\mathrm{x}) = \max_{\mathrm{y} \in \mathrm{Y}}\{\mathrm{w}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\}$ dapat dilakukan dengan cara mencari nilai maksimum untuk setiap baris yang sama kemudian menuliskannya pada samping kanan matriks, seperti pada matriks berikut ini:
(Catatan: angka yang dicetak tebal menunjukkan nilai maksimum di setiap baris)

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & \mathbf{4} \\ 3 & 4 & \mathbf{6} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

maka diperoleh *feasible labelling* yang diilustrasikan pada matriks berikut ini:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} & \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & \mathbf{4} \\ 3 & 4 & \mathbf{6} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 2 \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} & \end{array}$$

Pelabelan simpul ℓ yang bersesuaian dengan gambar 2 adalah sebagai berikut:

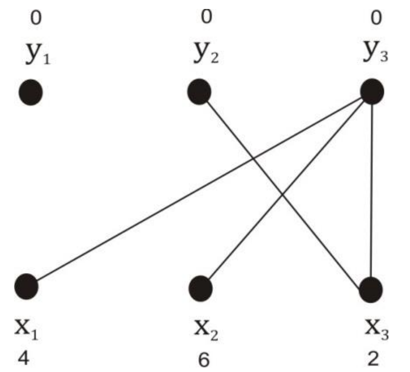
$\forall y \in Y,\ \ell(y_1, y_2, y_3) = (0,\ 0,\ 0)$

$\forall x \in X, \ell(x_1, x_2, x_3) = (4, 6, 2)$

Equality Subgraph

Misalkan terdapat suatu *feasible labelling* pada graf G, maka *equality subgraph* yang berkorespondensi dengan *feasible labelling* ℓ didefinisikan sebagai *spanning subgraph* dari G dengan himpunan sisi E_ℓ, dengan $\mathrm{E}_\ell = \{xy : \ell(x) + \ell(y) = \mathrm{w}(x, y)\}$, dan dinotasikan dengan G_ℓ.
Contoh 3:
Akan ditentukan *equality subgraph* dari graf bipartit lengkap berbobot pada gambar 2.
Penyelesaian:
Untuk mencari *equality subgraph* dapat dilakukan dengan menghimpun semua sisi E_ℓ yang bersesuaian dengan *feasible labelling* dari graf bipartit berbobot pada gambar 2, sedemikian sehingga $\mathrm{E}_\ell = \{xy : \ell(x) + \ell(y) = \mathrm{w}(x, y)\}$, dengan kata lain sisi E_ℓ adalah sisi yang mempunyai bobot yang sama dengan *feasible labelling* yaitu $(x_1y_3, x_2y_3, x_3y_2, x_3y_3)$.

Selanjutnya diperoleh *equality subgraph* G_ℓ seperti pada gambar 3 berikut ini:



Gambar 3 Contoh equality subgraph G_ℓ.

Teorema 3.1 Jika ℓ adalah *feasible labelling* dan M adalah *matching* sempurna pada E_ℓ, maka M merupakan *matching* dengan bobot maksimum. (Junming Xu, 2003)

Bukti:
Misalkan M^* adalah *matching* sempurna dari suatu *equality subgraph* G_ℓ, maka M^* juga merupakan *matching* sempurna dari G karena G_ℓ adalah *spanning subgraph* dari G.
Masing-masing $e \in M^*$ merupakan anggota dari G_ℓ dan simpul-simpul akhir dari sisi pada M^* menyatukan setiap simpul tepat satu kali, maka diperoleh:

$$w(M^*) = \sum_{e \in M} w(e) = \sum_{x \in V} \ell(\mathrm{x}) \tag{1}$$

Jika M adalah sebarang *matching* sempurna lain dari G, maka:

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{x \in V} \ell(x) \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $w(M^*) \geq w(M)$, maka M^* adalah *matching* optimal dari G.

Metode Hungarian

Untuk menyelesaikan masalah penempatan karyawan, metode Hungarian dapat direpresentasikan dengan graf bipartit lengkap berbobot. Adapun langkah-langkah dalam metode Hungarian adalah sebagai beikut:

1. Melakukan inisialisasi pelabelan simpul ℓ dan bentuk *Equality subgraph* G_ℓ:
   a. $\forall y \in Y$, $\ell(y) = 0$
   b. $\forall x \in X, \ell(x) = \max_{y \in Y}\{w(x,y)\}$.
2. Pilih sebarang *matching* M di G_ℓ.
3. Jika mendapatkan M sempurna berdasarkan teorema 3.1, maka proses berhenti. Jika tidak pilih sebarang simpul $u \in X$ yang *unsaturated* di M, dan didefinisikan $S = \{u\}, T = \emptyset$ ($S \subseteq X$ dan $T \subseteq Y$).
4. Jika $N_{G_\ell}(S) = T$, maka perbaharui label ℓ, jika tidak lanjut ke langkah 5. Hitung α_ℓ dan tambahkan sisi α_ℓ pada graf G_ℓ.
   $\alpha_\ell = min_{x \in S, y \notin T} \{\ell(x) + \ell(y) - \mathrm{w}(x,y)\}$
   Maka berlaku pelabelan simpul yang baru ℓ':
   $$\ell'(v) = \begin{cases} \ell(v) - \alpha_\ell \; untuk \; v \in \mathrm{S} \\ \ell(v) + \alpha_\ell \; untuk \; v \in \mathrm{T} \\ \ell(v) \quad yang \; \ell ainnya \end{cases}$$
5. $N_{G_\ell}(S) \neq T$, maka pilih $y \in N_{G_\ell}(S) - T$

- Jika y *matched* misalkan sampai z, dengan $z \in X$ dan $yz \in M$, maka bentuk lintasan M-*alternating* dengan menambahkan $S = S \cup \{z\}$ dan $T = T \cup \{y\}$, kemudian kembali ke langkah 4.
- Sebaliknya apabila y bebas (*unmatched*), maka akan terdapat P yang merupakan lintasan M-*augmenting* $u - y$, kemudian ganti M dengan $M' = M \Delta P$, yaitu mengganti sisi *matching* menjadi tidak *matching* dan sebaliknya pada lintasan M-*Augmenting* dan kembali ke langkah 3.

Contoh 4:
Akan dicari solusi dari contoh 1 dengan menggunakan metode Hungarian.
Penyelesaian:

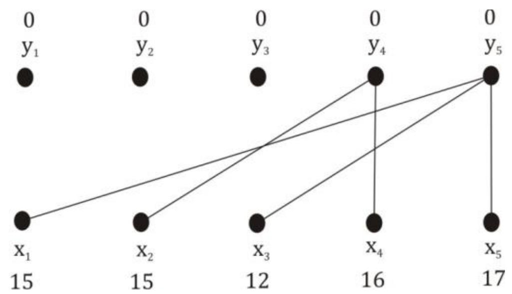
1. Melakukan pelabelan simpul ℓ dan dibentuk *equality subgraph* G_ℓ. Diperoleh *feasible labelling* yang diilustrasikan pada matriks berikut ini:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 & 10 & 8 & \mathbf{15} \\ 14 & 10 & 9 & \mathbf{15} & 13 \\ 9 & 8 & 7 & 8 & \mathbf{12} \\ 13 & 15 & 8 & \mathbf{16} & 11 \\ 10 & 13 & 14 & 11 & \mathbf{17} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ 15 \\ 15 \\ 12 \\ 16 \\ 17 \\ \\ \end{array}$$

Sehingga diperoleh pelabelan simpul ℓ:

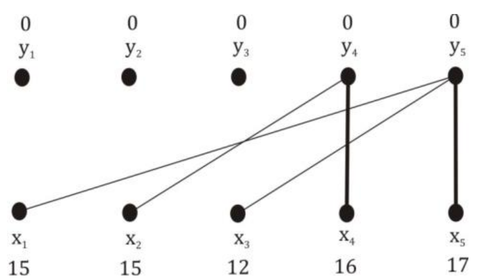
a. $\forall y \in Y, \ell(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ = (0, 0, 0, 0, 0, 0)
b. $\forall x \in X, \ell(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (15, 15, 12, 16, 17)$

Berdasarkan pelabelan simpul ℓ, diperoleh *equality subgraph* G_ℓ seperti pada gambar 4 berikut ini:



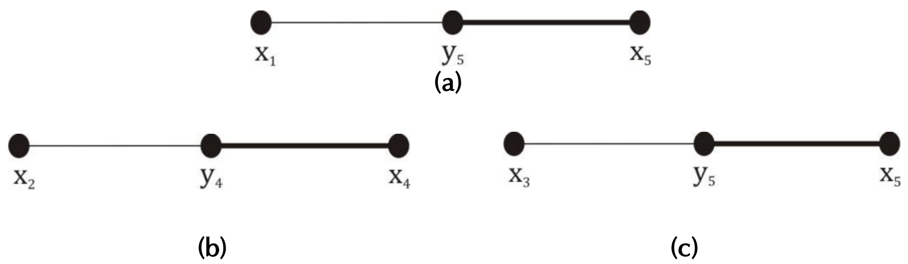
Gambar 4 Equality subgraph $\boldsymbol{G_\ell}$.

2. Pilih sebarang *matching* M (ditandai dengan sisi yang dicetak tebal) di *equality subgraph* G_ℓ pada gambar 4, misal dipilih
$M = (x_4, y_4), (x_5, y_5)$



Gambar 5 Matching $\boldsymbol{M}$.

3. *Matching* M pada gambar 5 bukan merupakan *matching* sempurna, karena G_ℓ belum memuat semua simpul dan masih terdapat simpul pada X yang *unsaturated* di M, maka pilih sebarang $u \in X$ yang *unsaturated* di M. Didapatkan simpul $x_1, x_2, x_3 \in X$, sehingga didefinisikan S $=\{x_1, x_2, x_3\}$ dan T = $\emptyset$.
4. Berdasarkan langkah 3, diperoleh S $=\{x_1, x_2, x_3\}$, T = $\emptyset$ dan simpul yang bertetangga dengan simpul di S adalah y_4 dan y_5, maka $N_{G_\ell}(S) =\{ y_4, y_5\}$. Karena $N_{G_\ell}(S) \neq T$, lanjutkan ke langkah 5 menggunakan algoritma hungarian, yaitu pilih $y \in N_{G_\ell}(S) - T$. Misalkan y *matched* sampai z, dengan $z \in X$ dan $yz \in M$, maka bentuk lintasan M-*alternating* dengan menambahkan $S = S \cup \{z\}$ dan $T = T \cup \{y\}$. Dalam hal ini diperoleh $y_4, y_5 \in N_{G_\ell}(S) - T$, karena y_4, y_5 *Matched* di *Matching* M dengan $x_4, x_5 \in X$ dan $x_4y_4, x_5y_5 \in M$, maka akan dibentuk lintasan M-*alternating* dengan menambahkan S $=\{x_1, x_2, x_3\} \cup \{x_4, x_5\}$ atau S $=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan $T = \emptyset \cup \{y_4, y_5\}$ atau $T = \{y_4, y_5\}$.



Gambar 6 (a) Lintasan $\boldsymbol{M}$-alternating berawal dari simpul $\boldsymbol{x_1}$, (b) Lintasan $\boldsymbol{M}$-alternating berawal dari simpul $\boldsymbol{x_2}$, (c) Lintasan $\boldsymbol{M}$-alternating berawal dari simpul $\boldsymbol{x_3}$

5. Berdasarkan langkah 4 diperoleh S $=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $T = \{y_4, y_5\}$ dan simpul yang bertetangga dengan simpul-simpul di S adalah y_4 dan y_5, maka $N_{G_\ell}(S)$=$\{ y_4, y_5\}$. Dalam hal ini $N_{G_\ell}(S) = T$ maka lanjutkan ke langkah 4 dalam algoritma.
   Hitung α_ℓ

$$\alpha_\ell = min_{x\in S, y\notin T} \begin{cases} 15+0-10=5\,,(x_1,y_1) \\ 15+0-12=3\,,(x_1,y_2) \\ 15+0-10=5\,,(x_1,y_3) \\ \mathbf{15+0-14=1}\,,(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_1}) \\ 15+0-10=5\,,(x_2,y_2) \\ 15+0-9=6\,,(x_2,y_3) \\ 12+0-9=3,(x_3,y_1) \\ 12+0-8=4\,,(x_3,y_2) \\ 12+0-7=5\,,(x_3,y_3) \\ 16+0-13=3\,,(x_4,y_1) \\ \mathbf{16+0-15=1}\,,(\boldsymbol{x_4},\boldsymbol{y_2}) \\ 16+0-8=8\,,(x_4,y_3) \\ 17+0-10=7\,,(x_5,y_1) \\ 17+0-13=4\,,(x_5,y_2) \\ 17+0-14=3\,,(x_5,y_3) \end{cases}$$
$$= 1$$

Diperoleh $\alpha_\ell = 1$ yaitu pada (x_2, y_1), $(\mathrm{x}_4, \mathrm{y}_2)$ dan tambahkan sisi-sisi tersebut pada graf G_ℓ. Kurangi elemen-elemen pada label S $=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dengan 1, dan tambahkan elemen-elemen label dari $T = \{y_4, y_5\}$ dengan 1.

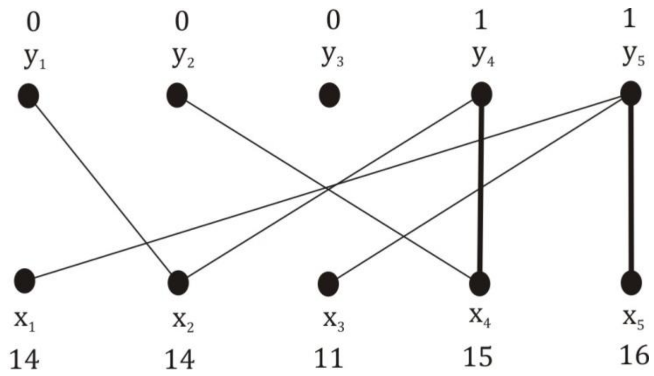
$$\ell'(v) = \begin{cases} \ell(v) - 1\ untuk\ v \in \mathrm{S} \\ \ell(v) + 1\ untuk\ v \in \mathrm{T} \\ \ell(v)\quad yang\ \ell ainnya \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c c c}
 & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{matrix} & & \\
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 12 & 10 & 8 & \mathbf{15} \\ 14 & 10 & 9 & \mathbf{15} & 13 \\ 9 & 8 & 7 & 8 & \mathbf{12} \\ 13 & 15 & 8 & \mathbf{16} & 11 \\ 10 & 13 & 14 & 11 & \mathbf{17} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 15 \\ 15 \\ 12 \\ 16 \\ 17 \end{matrix} & \begin{matrix} 14 \\ 14 \\ 11 \\ 15 \\ 16 \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & \\
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} & &
\end{array}$$

Sehingga diperoleh pelabelan simpul ℓ':

a. $\forall y \in Y$, $\ell(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ = (0, 0, 0, 0, 1, 1)
b. $\forall x \in X, \ell'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (14, 14, 11, 15, 16)$

Berdasarkan gambar 5 dan pelabelan simpul baru ℓ' diperoleh *equality subgraph* $G_\ell{}'$ dan sebarang *matching* M yang ditandai dengan sisi yang dicetak tebal seperti pada gambar 7 berikut:

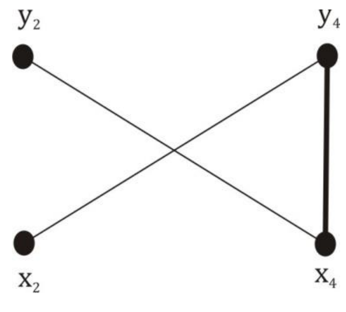


Gambar 7 Equality subgraph $\boldsymbol{G_\ell{}'}$ dan matching $\boldsymbol{M}$.

6. Berdasarkan langkah 5 dan gambar 7, diperoleh S ={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}, $T = \{y_4, y_5\}$ dan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul-simpul di S adalah y_1, y_2, y_4 dan y_5 sehingga $N_{G_{\ell'}}(S)$ ={ y_1, y_2, y_4, y_5}. Karena $N_{G_{\ell'}}(S) \neq T$, maka lanjutkan ke langkah 5 menggunakan algoritma hungarian, yaitu pilih

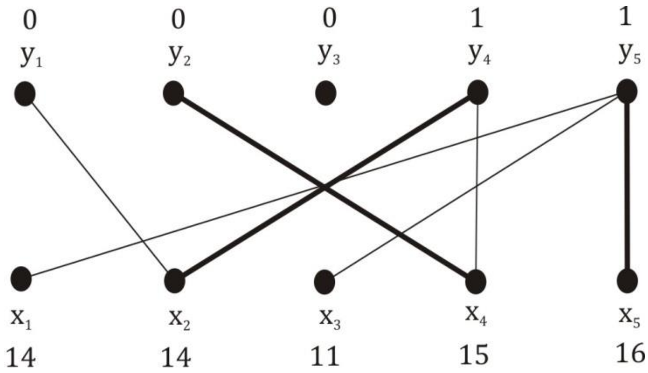
$$y \in N_{G_{\ell'}}(S)\mathrm{T}.$$

7. Dalam hal ini diperoleh $y_1, y_2 \in N_{G_{\ell'}}(S) - T$. Karena y_1, y_2 bebas (*unmatched*), sehingga menurut langkah 5 dalam algoritma Hungarian akan terdapat P yang merupakan lintasan M-*augmenting* $u - y$, yaitu $P_1 = \{(x_2, y_4), (x_4, y_4), (x_4, y_2)\}$ dengan dua titik akhir bebas,
maka ganti M dengan $M' = M\Delta P_1$ yaitu mengganti sisi *matching* menjadi tidak *matching* dan sebaliknya pada lintasan M-*augmenting* dan kembali ke langkah 3.
$M' = M\Delta P_1$
$M' = \{(x_4, y_4), (x_5, y_5)\} \Delta \{(x_2, y_4), (x_4, y_4), (x_4, y_2)\}$
$M' = \{(x_2, y_4), (x_4, y_2), (x_5, y_5)\}$



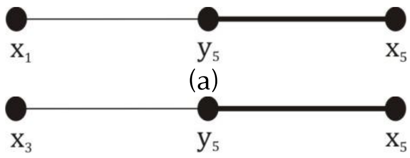
Gambar 8 Lintasan $\boldsymbol{M}$-*Augmenting* $\boldsymbol{P_1}$.

Berdasarkan gambar 8 didapatkan *matching* baru $M' = (x_2, y_4), (x_4, y_2), (x_5, y_5)$. *Matching* M tersebut bukan merupakan *matching* sempurna, karena masih terdapat simpul pada X yang *unsaturated* di M', maka pilih sebarang $u \in X$ yang *unsaturated* di M. Didapatkan simpul $x_1, x_3 \in X$ sehingga didefinisikan S ={x_1, x_3} dan $T = \emptyset$.



Gambar 9 *Equality Subgraph* $\boldsymbol{G_\ell}'$ dan *Matching* $\boldsymbol{M}'$

8. Berdasarkan langkah 7 dan gambar 9 diperoleh S ={x_1, x_3}, $T = \emptyset$ dan simpul yang bertetangga dengan simpul-simpul di S adalah y_5 maka $N_{G_\ell'}(S)$ ={ y_5}. Karena $N_{G_\ell'}(S) \neq T$, maka lanjutkan ke langkah 5 menggunakan algoritma hungarian, yaitu pilih $y \in N_{G_\ell'}(S) - T$. Misalkan y *matched* sampai z, dengan $z \in X$ dan $yz \in M$ maka bentuk lintasan M-*alternating* dengan menambahkan $S = S \cup \{z\}$ dan $T = T \cup \{y\}$. Dalam hal ini diperoleh $y_5 \in N_{G_\ell'}(S)$T, y_5 *matched* di *matching* M dengan $x_5 \in X$ dan $x_5y_5 \in M$, maka akan dibentuk lintasan M-*alternating* dengan menambahkan $S = \{x_1, x_3\} \cup \{x_5\}$ atau S ={x_1, x_3, x_5} dan $T = \emptyset \cup \{y_5\}$ atau $T = \{y_5\}$.



Gambar 10 (a) Lintasan $\boldsymbol{M}$-alternating berawal dari simpul $\boldsymbol{x_1}$, (b) Lintasan $\boldsymbol{M}$-alternating berawal dari simpul $\boldsymbol{x_3}$,

9. Berdasarkan langkah 8 diperoleh $S = \{x_1, x_3, x_5\}$, $T = \{y_5\}$ dan simpul yang bertetangga dengan simpul-simpul di S adalah y_5, maka $N_{G_\ell'}(S)$={ y_5}, dalam hal ini $N_{G_\ell'}(S) = T$ maka lanjutkan ke langkah 4 dalam algoritma .
   Hitung α_ℓ

$$\alpha_\ell = min_{x\in S, y\notin T}\begin{cases} 14+0-10=4\,,(x_1,y_1)\\ \mathbf{14+0-12=2}\,,(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_2})\\ 14+0-10=4\,,(x_1,y_3)\\ 14+1-8=7\,,(x_1,y_4)\\ \mathbf{11+0-9=2}\,,(\boldsymbol{x_3},\boldsymbol{y_1})\\ 11+0-8=3\,,(x_3,y_2)\\ 11+0-7=4,(x_3,y_3)\\ 11+1-8=4\,,(x_3,y_4)\\ 16+0-10=6\,,(x_5,y_1)\\ 16+0-13=3\,,(x_5,y_2)\\ \mathbf{16+0-14=2}\,,(\boldsymbol{x_5},\boldsymbol{y_3})\\ 16+1-11=6\,,(x_5,y_4)\end{cases}$$
$$= 2$$

Didapatkan $\alpha_\ell = 2$ yaitu pada $(x_1,y_2),(x_3,y_1)$ dan (x_5,y_3). Tambahkan sisi-sisi tersebut pada graf $G_\ell{}'$.

Kurangi elemen-elemen pada label S $=\{x_1,x_3,x_5\}$ dengan 2 dan tambahkan elemen label dari $T=\{y_5\}$ dengan 2.

$$\ell''(v) = \begin{cases} \ell'(v) - 2\; untuk\; v \in \mathrm{S} \\ \ell'(v) + 2\; untuk\; v \in \mathrm{T} \\ \ell'(v) \quad yang\; \ell ainnya \end{cases}$$

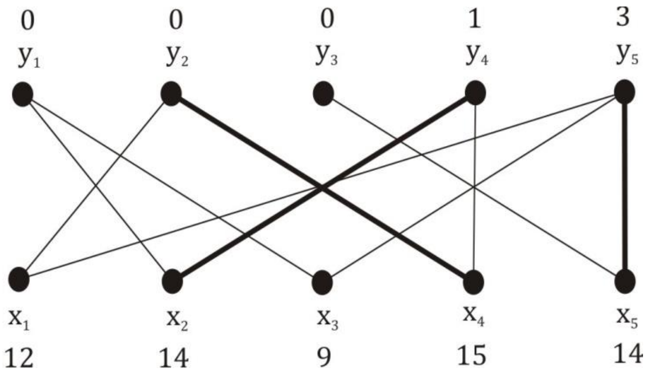
$$\begin{array}{c|ccccc|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & & & \\ x_1 & 10 & 12 & 10 & 8 & \mathbf{15} & 15 & 14 & 12 \\ x_2 & 14 & 10 & 9 & \mathbf{15} & 13 & 15 & 14 & 14 \\ x_3 & 9 & 8 & 7 & 8 & \mathbf{12} & 12 & 11 & 9 \\ x_4 & 13 & 15 & 8 & \mathbf{16} & 11 & 16 & 15 & 15 \\ x_5 & 10 & 13 & 14 & 11 & \mathbf{17} & 17 & 16 & 14 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & & & \end{array}$$

Sehingga diperoleh pelabelan simpul ℓ'':

a. $\forall$y $\in$ Y, ℓ'' (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) = (0, 0, 0, 0, 1, 3)

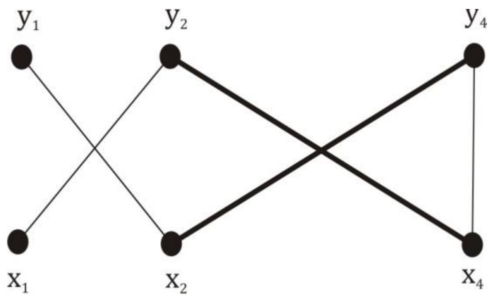
b. $\forall x \in \mathrm{X}, \ell''(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (12, 14\,, 9, 15, 14\,)$

Berdasarkan gambar 9 dan pelabelan simpul baru ℓ'' diperoleh *equality subgraph* G_ℓ'' dan *matching M* yang ditandai dengan rusuk yang dicetak tebal seperti pada gambar 11 berikut:

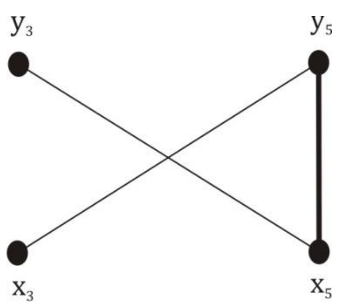


Gambar 11 *Equality subgraph* $\boldsymbol{G_\ell}''$ dan *matching* $\boldsymbol{M'}$.

10. Berdasarkan langkah 9, dan gambar 11 diperoleh S =$\{x_1, x_3, x_5\}$, $T = \{y_5\}$ dan simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul-simpul di S adalah y_1, y_2, y_3 dan y_5 maka $N_{G_{\ell''}}(S)$ =$\{ y_1, y_2, y_3, y_5\}$. Karena $N_{G_{\ell''}}(S) \neq T$ maka lanjutkan ke langkah 5 menggunakan algoritma hungarian, yaitu pilih y ∈ $N_{G_{\ell''}}(S)$T.
11. Berdasarkan langkah 10 diperoleh $y_1, y_2, y_3 \in N_{G_{\ell''}}(S)- T$. Dalam hal ini y_2 *matched* di M dan y_2, y_3 bebas (*unmatched*) sehingga menurut langkah 5 dalam algoritma Hungarian akan terdapat P yang merupakan lintasan M-*augmenting* $u - y$. Berdasarkan gambar 11 diperoleh 2 lintasan M-*augmenting* yaitu:
$P_2 = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1)(x_2, y_4)(x_4, y_2)(x_4, y_4)\}$ $P_3 = \{(x_3, y_5), (x_5, y_3), (x_5, y_5)\}$
maka ganti M' dengan $M'' = M'\Delta P_2 \Delta P_3$ yaitu mengganti sisi *matching* menjadi tidak *matching* dan sebaliknya pada lintasan M-*augmenting* dan kembali ke langkah 3.
$M'' = M'\Delta P_2 \Delta P_3$
$M'' = \{(x_2, y_4), (x_4, y_2), (x_5, y_5)\}\Delta$
$\{(x_1, y_2), (x_2, y_1)(x_2, y_4)(x_4, y_2)(x_4, y_4)\}\Delta$ $\{(x_3, y_5), (x_5, y_3), (x_5, y_5)\}$
M'' =$\{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_4, y_4), (x_3, y_5), (x_5, y_3)\}$

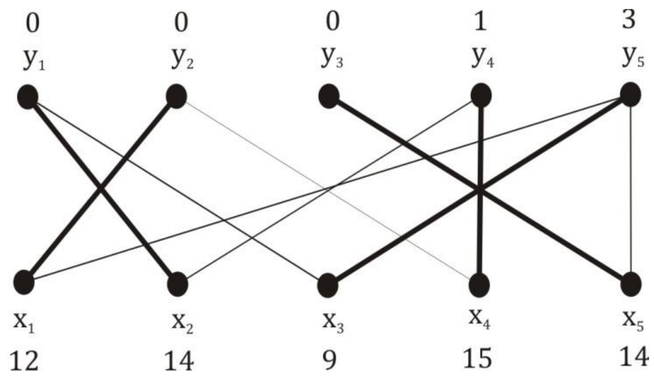


Gambar 12 Lintasan $\boldsymbol{M}$-*augmenting* $\boldsymbol{P_2}$.



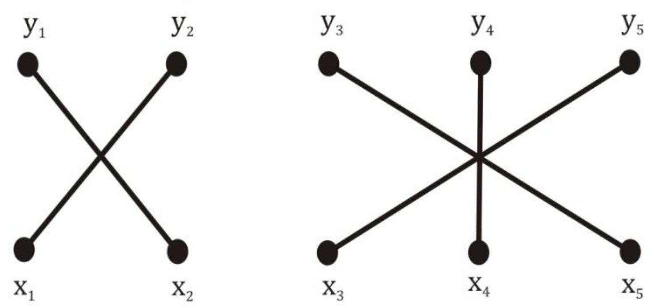
Gambar 13 Lintasan $\boldsymbol{M}$-*augmenting* $\boldsymbol{P_3}$.

Berdasarkan Gambar 11 didapatkan *matching* baru
$M'' = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_4, y_4), (x_3, y_5), (x_5, y_3)\}$.
Matching M'' tersebut dapat dikatakan sempurna karena sudah memuat semua simpul dalam *equality subgraph* G_ℓ'', sehingga *matching* tersebut sudah optimal sehingga algoritma berhenti.



Gambar 14 Equality subgraph $\boldsymbol{G_\ell}''$ dan Matching $\boldsymbol{M}''$.

12. Dari langkah-langkah di atas diperoleh *matching* sempurna
$M = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_4, y_4), (x_3, y_5), (x_5, y_3)\}$,
maka diperoleh nilai solusi optimal dengan menjumlahkan nilai-nilai *feasible labeling* pada *equality subgraph* G_ℓ, yaitu:
$12 + 14 + 9 + 15 + 14 + 3 + 1 + 0 + 0 + 0 = 68.$
Perhatikan bahwa nilai ini akan sama dengan total bobot dari *matching* sempurna M yaitu:
$w(x_1, y_2) + \mathrm{w}(x_2, y_1) + w(x_4, y_4) + \mathrm{w}(x_3, y_5) + \mathrm{w}(x_5, y_3)$
$= 12 + 14 + 16 + 12 + 14 = 68$
13. Jadi penempatan karyawan pada masing-masing pekerjaan adalah sebagai berikut:



Gambar 15 Matching sebagai solusi masalah penempatan karyawan.

Berdasarkan hasil *matching* pada gambar 15 untuk mendapatkan hasil yang optimal, maka penempatan karyawan yang sebaiknya dilakukan oleh perusahaan adalah sebagai berikut:

- Karyawan Afif (x_1) ditugaskan mengerjakan pekerjaan II (y_2), dengan produk yang dihasilkan sebanyak 12.
- Karyawan Bady (x_2) ditugaskan mengerjakan pekerjaan I (y_1), dengan produk yang dihasilkan sebanyak 14.
- Karyawan Dzaki (x_3) ditugaskan mengerjakan pekerjaan V (y_5), dengan produk yang dihasilkan sebanyak 12.
- Karyawan Faras (x_4) ditugaskan mengerjakan pekerjaan IV (y_4), dengan produk yang dihasilkan sebanyak 16.
- Karyawan Ghazy (x_5) ditugaskan mengerjakan pekerjaan III (y_3), dengan produk yang dihasilkan sebanyak 14.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan metode Hungarian, masalah penempatan karyawan pada perusahaan distro dapat diselesaikan dengan jumlah produk maksimum yang dapat dihasilkan adalah sebanyak 68 tiap bulannya.

Kesimpulan

Dari penjelasan yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Langkah-langkah metode Hungarian pada graf bipartit lengkap berbobot dengan $|X| = |Y|$, akan menghasilkan *matching* sempurna dengan bobot yang optimal, dimana semua himpunan simpul di X dan Y *saturated* oleh *matching* M.
2. Masalah penempatan karyawan dengan jumlah karyawan sama dengan jumlah pekerjaan, dapat dimodelkan dengan menggunakan graf bipartit lengkap berlabel $G = (X, Y)$, dimana X adalah merupakan himpunan karyawan dan Y adalah merupakan himpunan posisi (pekerjaan). Sisi-sisi yang menghubungkannya adalah menyatakan hubungan antara karyawan dengan posisi (pekerjaan) tersebut. Dalam hal ini aspek yang akan dioptimalkan adalah bobot atau peluang penempatan tiap X karyawan pada Y pekerjaan. Untuk mencari solusi optimal dari penempatan karyawan sama halnya dengan mencari *matching* sempurna dengan bobot maksimal pada graf bipartit. Dengan menerapkan langkah-langkah pada metode hungarian akan didapatkan solusi optimal dari penempatan karyawan.

Referensi

[1] **Chartrand**, **G**. and **Zhang**, **P**. 2009. *Chromatic Graph Theory*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL.
[2] **Deistel**, **Reinhard**. 2005. *Graph Theory Electronic edition*. Springer-Verlag Heidelberg. New York.
[3] **Fournier**, **Jean-claude**. 2009. *Graph Theory and Applications with Exercises and Problems.* ISTE Ltd, London.
[4] **Harris**, **J.M.**, **Hirst**, **J.L.** and **Mossinghoff**, **M.J.**, 2008. *Combinatorics and Graph Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics (2nd ed.). Springer.
[5] **Munir**, **Rinaldi**. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
[6] **Rosen**, **Kenneth H**. 1999. *Discrete Mathematics and Its Application.* McGraw-Hill.
[7] **Sutarno**, **Heri**. **Piatna**, **Nanang**. **Nurjanah**. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
[8] **Vasudev C**. 2006. *Graph Theory with Applications.* New Age International, New Delhi.
[9] **Wijaya**, **Adi**. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Politeknik Telkom.
[10] **Xu**, **Junming**. 2003. *Theory and Application of Graphs.* Kluwer Academic Publishers, London.
[11] http://www.informatika.org/ rinaldi/Matdis/20082009/Makalah2008/Makalah0809-048.pdf diakses pada tanggal 11 November 2011 pukul 20.23.
[12] http://yuwono.himatif.or.id/download/RISET%20OPERASIONAL.pdf diakses pada tanggal 10 Maret 2012 pukul 19.35.