JURNAL FOURIER | Oktober 2026, Vol. 15, No. 2, 78-91 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2026.152.78-91 E-ISSN 2541-5239

Penerapan Teorema Densitas Ruang Sobolev pada Konstruksi Skema Galerkin dan Eksistensi Lokal Solusi Aproksimasi untuk Sistem Reaksi-Difusi Schnakenberg

Pipit Pratiwi Rahayu[1*], Aulia Khifah Futhona[2]

[12]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta,
Jalan Adisucipto, Yogyakarta 55281, Indonesia

Korespondensi; Pipit Pratiwi Rahayu, Email: pipit.rahayu@uin-suka.com

Abstrak

Penelitian ini membahas sifat *dense* (kepadatan) dari ruang fungsi mulus $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ di dalam ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ dan menunjukkan penerapannya pada analisis sistem reaksi-difusi. Pembuktian teorema densitas dilakukan melalui teknik mollifikasi dan partisi kesatuan pada domain terbuka terbatas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sebagai aplikasi, sifat densitas tersebut digunakan untuk membangun rumusan solusi lemah dari sistem reaksi-difusi Schnakenberg dengan syarat batas Neumann homogen, khususnya dalam memperluas keberlakuan fungsi tes dari $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ ke $W^{1,2}(\Omega)$. Berdasarkan rumusan ini, dilakukan konstruksi skema solusi aproksimasi Faedo–Galerkin. Solusi didekati melalui basis fungsi eigen operator Laplace–Neumann, yang mereduksi sistem persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan diferensial biasa berdimensi hingga untuk koefisien aproksimasinya. Ruas kanan sistem tersebut dibuktikan berupa polinomial sehingga sifat Lipschitz lokal terpenuhi. Eksistensi dan ketunggalan solusi sistem Galerkin secara lokal dibuktikan melalui Teorema Picard–Lindelöf. Hasil ini menunjukkan bahwa teorema densitas klasik berperan sebagai komponen struktural dalam membangun kerangka aproksimasi berdimensi hingga bagi sistem reaksi-difusi nonlinier, serta menjadi landasan bagi kajian eksistensi global dan keterbatasan solusi pada penelitian lanjutan.

Kata Kunci: metode Faedo–Galerkin, model Schnakenberg, ruang Sobolev, teorema densitas Sobolev

Abstract

This study examines the density of smooth functions $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ in the Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ and demonstrates its application to the analysis of a reaction–diffusion system. The density theorem is established using mollification and partition-of-unity techniques on a bounded open domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As an application, the density property is used to construct the weak formulation of the Schnakenberg reaction–diffusion system with homogeneous Neumann boundary conditions, in particular to extend the validity of test functions from $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ to $W^{1,2}(\Omega)$. Based on this formulation, a Faedo–Galerkin approximation scheme is constructed. The solution is approximated using a basis of eigenfunctions of the Neumann–Laplace operator, which reduces the partial differential system to a finite-dimensional system of ordinary differential equations for the approximation coefficients. The right-hand side of this system is shown to be polynomial, so that the local Lipschitz property is satisfied. Local existence and uniqueness of the Galerkin system solution are established through the Picard–Lindelöf Theorem. These results show that the density theorem serves as a structural component in building a finite-dimensional approximation framework for a nonlinear reaction–diffusion system, and provide a foundation for the study of global existence and solution boundedness in future work.

Keywords: Faedo–Galerkin method, Schnakenberg model, Sobolev spaces, Sobolev density theorem

Pendahuluan

Matematika sebagai ilmu dasar terus berkembang seiring kebutuhan untuk memodelkan fenomena alam secara kuantitatif dan sistematis. Salah satu wujud perkembangan tersebut adalah teori persamaan diferensial parsial (PDP), yang menjadi bahasa formal bagi berbagai proses fisis, kimiawi, maupun

© 2022 JURNAL FOURIER

biologi. Mulai dari perambatan panas, aliran fluida, hingga penyebaran zat dalam reaksi kimia yang melibatkan proses difusi sekaligus reaksi antar zat. Kompleksitas permasalahan yang dimodelkan oleh PDP menuntut kerangka analisis yang cukup kuat untuk menjamin keberadaan dan sifat solusi secara teliti, tidak sekadar secara formal atau numerik semata. Kebutuhan inilah yang mendorong berkembangnya ruang-ruang fungsi abstrak, khususnya ruang Lebesgue dan ruang Sobolev, sebagai landasan bagi analisis fungsional modern dalam menangani solusi persamaan diferensial dalam arti lemah, yaitu solusi yang tidak harus terdiferensialkan secara klasik namun tetap memenuhi persamaan dalam kerangka integral yang bermakna.

Untuk menangani sistem semacam ini, diperlukan kerangka ruang fungsi yang memungkinkan solusi dianalisis tanpa menuntut kemulusan klasik sejak awal. Ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, yang landasan teoretisnya disusun secara sistematis. Riset ini mengakomodasi fungsi beserta turunan lemahnya dalam satu struktur norm yang konsisten, sehingga solusi persamaan diferensial dapat dicari dalam arti lemah yaitu dipenuhi ketika diuji terhadap fungsi tes, bukan secara *pointwise* melainkan mengikuti kerangka solusi lemah [1], [2]. Namun demikian, ruang Sobolev pada dasarnya adalah ruang abstrak yang elemen-elemennya belum tentu mulus, sehingga keabsahan dari integrasi parsial, konstruksi basis aproksimasi, hingga perluasan fungsi tes bergantung pada satu sifat struktural mendasar yaitu kepadatan (*density*) himpunan fungsi mulus di dalam ruang Sobolev. Sifat densitas ruang Sobolev tersebut ditunjukkan dengan teknik mollifikasi dan partisi kesatuan. Hal ini menjadi materi dasar dalam literatur analisis fungsional [3], [4].

Meskipun teorema densitas ini telah mapan secara teoretis sejak enam dekade lalu, perannya dalam literatur sering kali disajikan secara deklaratif. Disebutkan penting bagi analisis eksistensi solusi masalah syarat batas, tanpa disertai penerapan konkret yang menunjukkan secara eksplisit bagaimana sifat tersebut benar-benar dipakai dalam konstruksi solusi suatu sistem PDP tertentu. Akibatnya, terdapat jarak antara teorema abstrak dan penerapannya pada perma salahan reaksi-difusi. Jarak inilah yang menjadi titik permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini.

Di sisi lain, konstruksi solusi aproksimasi berdimensi hingga bagi persamaan evolusi telah berkembang sejak metode Galerkin (1915). Pada awalnya diperkenalkan untuk masalah kesetimbangan elastis lalu diperluas secara sistematis oleh Faedo (1949) untuk persamaan bergantung waktu. Metode Faedo–Galerkin bekerja dengan mereduksi persamaan diferensial parsial, yang berada di ruang berdimensi tak hingga, menjadi sistem persamaan diferensial biasa berdimensi hingga melalui proyeksi solusi pada subruang yang dibangun oleh sejumlah berhingga fungsi basis. Basis yang dipilih haruslah padat dalam ruang solusi, agar proses pembatasan dimensi ini dapat dijamin konvergen ketika dimensi aproksimasi diperbesar. Teorema densitas ruang Sobolev berperan sebagai syarat struktural bagi keabsahan metode aproksimasi itu sendiri [5], [6].

Model Schnakenberg dipilih sebagai studi kasus penerapan kerangka ini. Model ini diperkenalkan oleh Schnakenberg (1979) sebagai jawaban atas pertanyaan teoretis dalam kimia-fisika mengenai jumlah minimum langkah reaksi kimia yang dibutuhkan agar suatu sistem menunjukkan perilaku *limit cycle* (osilasi mandiri). Skema reaksi autokatalitik trimolekuler yang diusulkan menghasilkan sistem dengan nonlinieritas $f(u,v) = a - u + u^2 v$ dan $g(u,v) = b - u^2 v$ [7]. Ketika diperluas dengan suku difusi, sistem ini menjadi salah satu contoh baku mekanisme instabilitas Turing [8] dalam pembentukan pola spasial pada fenomena biologis, dan telah dikaji luas dari sisi dinamika pola, kestabilan, dan bifurkasi [9], [10], [11]. Struktur aljabarnya yang relatif sederhana namun tetap merepresentasikan ciri khas sistem aktivator-depletion, menjadikannya kandidat yang tepat untuk menunjukkan secara eksplisit, langkah demi langkah, bagaimana teorema densitas berperan dalam dua tahap konstruksi: pertama, memperluas keabsahan rumusan solusi lemah dari kelas fungsi tes mulus ke seluruh ruang Sobolev; kedua, berperan dalam pemilihan basis aproksimasi pada skema Faedo–Galerkin.

Penelitian ini berfokus pada tahap awal dan fundamental dari kerangka tersebut antara lain pembuktian teorema densitas itu sendiri, penerapannya dalam membangun rumusan solusi lemah sistem

Schnakenberg, serta konstruksi skema aproksimasi Faedo–Galerkin beserta pembuktian eksistensi dan ketunggalan lokal solusi sistem persamaan diferensial biasa yang dihasilkan melalui Teorema Picard–Lindelöf, yang berlaku karena struktur polinomial nonlinieritas sistem menjamin sifat Lipschitz lokal. Nilai baru yang ditawarkan bukan terletak pada pembuktian ulang teorema densitas, melainkan pada penggunaannya secara eksplisit dan terstruktur sebagai alat kerja dalam tahap awal konstruksi solusi, sesuatu yang jarang dieksekusi secara rinci dalam kajian sejenis, yang umumnya langsung mengasumsikan keberadaan solusi aproksimasi tanpa menelusuri perannya mulai dari fondasi analisis fungsionalnya [12].

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk: (1) membuktikan bahwa himpunan $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ bersifat dense pada $W^{m,p}(\Omega)$ melalui teknik mollifikasi dan partisi kesatuan; (2) menerapkan sifat *dense* tersebut untuk membangun rumusan solusi lemah sistem reaksi-difusi Schnakenberg dan memperluas keabsahan fungsi tesnya dari $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ ke $W^{1,2}(\Omega)$; dan (3) mengonstruksi skema aproksimasi Faedo–Galerkin bagi sistem tersebut, dan membuktikan eksistensi serta ketunggalan solusi sistem persamaan diferensial biasa yang dihasilkan secara lokal melalui Teorema Picard–Lindelöf sebagai landasan bagi kajian eksistensi global dan keterbatasan solusi pada penelitian lanjutan.

Landasan Teori

Persamaan Diferensial Biasa

Pembahasan pada penelitian ini menggunakan beberapa dasar persamaan diferensial biasa atau PDB pada sistem bilangan real. Kondisi Lipschitz lokal dan Teorema Picard-Lindelof suatu masalah syarat awal digunakan sebagai dasar utama pembuktian eksistensi dan ketunggalan solusi sistem Schnakenberg.

Definisi 2.1 (Lipschitz lokal) [12] Misalkan $U \subseteq \mathbb{R}^n$ merupakan himpunan terbuka. Fungsi $F: U \to \mathbb{R}^n$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz lokal di U jika untuk setiap $z \in U$ terdapat $r > 0$ dan $L > 0$ sedemikian sehingga $\bar{B}(z,r) \subset U$ dan $\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq M\|y_1 - y_2\|$ untuk setiap $y_1, y_2 \in \bar{B}(z,r)$.

Teorema 2.2 (Picard-Lindelof) (Eksistensi-Ketunggalan Lokal Solusi) [12] Misalkan $U \subseteq \mathbb{R}^n$ merupakan himpunan terbuka dan $F: U \to \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi kontinu dan Lipschitz lokal di U. Untuk setiap titik awal $y_0 \in U$ terdapat $\tau > 0$ sehingga masalah nilai awal

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(y(t)), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

memiliki tepat satu solusi $y \in C^1([0,\tau];\ \mathbb{R}^n)$.

Ruang Fungsi

1. Ruang Lebesgue

Perkembangan teori analisis modern dimulai dengan pengenalan ruang Lebesgue oleh Henri Lebesgue pada awal abad ke-20. Teori integral Lebesgue memperluas konsep integral Riemann sehingga memungkinkan integrasi fungsi-fungsi yang lebih umum. Dari sini lahir ruang Lebesgue $L^p(\Omega)$ yang menjadi dasar dari teori ruang fungsional [13], [14].
Diberikan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Untuk $1 \leq p < \infty$, ruang $L^p(\Omega)$ didefinisikan sebagai himpunan

$$L^p = \{f | f: \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ terukur dan } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

Norm $L^p(\Omega)$ didefinisikan dengan $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Bilangan real *M* disebut batas essensial fungsi *f*, jika $|f(x)| \leq M$ hampir dimana-mana pada Ω. Fungsi *f* dikatakan terbatas essensial jika *f* memiliki batas essensial. Supremum essensial fungsi f pada Ω didefinisikan sebagai

$$\overset{ess\ sup}{x\in\Omega} f(x) = inf\ \{M | f(x) \leq M\ pada\ \Omega\}.$$

Untuk $p = \infty$, $L^{\infty}(\Omega)$ merupakan himpunan semua fungsi terukur yang terbatas essensial pada Ω atau ditulis $L^{\infty}(\Omega) = \{f | f: \Omega \to \mathbb{R}, f\ terukur\ dan\ \overset{ess\ sup}{x\in\Omega} |f(x)| < \infty\}$. Norm $L^{\infty}(\Omega)$ didefinisikan dengan $\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \overset{ess\ sup}{x\in\Omega} |f(x)|$.
Pada $L^p(\Omega)$ berlaku $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ untuk $1 \leq p < q \leq \infty$ dimana Ω terbatas.

2. Ruang Sobolev

Ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ diperkenalkan sebagai subset dari ruang Lebesgue $L^p(\Omega)$ dengan konsep derivatif lemah (*weak derivative*), yang kemudian menjadi kerangka utama dalam formulasi persamaan diferensial parsial. Untuk dapat memahami mengenai ruang Sobolev, dikenalkan terlebih dahulu konsep terintegral lokal dan derivatif lemah [1], [3].

Diberikan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω terbatas. Fungsi $f \in L^p(\Omega)$ dikatakan terintegral lokal jika nilai dari $\int_K |f(x)|^p dx$ ada untuk setiap himpunan kompak $K \subset \Omega$. Fungsi $f \in L^p(\Omega)$ yang terintegral lokal dapat ditulis $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Setiap fungsi *f* yang terintegral lokal pada $\mathbb{R}^n$ dapat mendefinisikan suatu fungsional linear kontinu *F* pada $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ yaitu $F(\phi) = (f, \phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$, dengan $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Sedangkan konsep derivatif lemah sebagai berikut:
Diberikan $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω terbatas. Fungsi $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ dikatakan mempunyai derivatif lemah order α pada Ω jika terdapat fungsi $g \in L^p_{loc}(\Omega)$ sehingga berlaku $\int_{\Omega} g\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^{\alpha}\phi dx$, untuk setiap fungsi tes $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Fungsi *g* merupakan derivatif lemah order α dari fungsi *f*. Selanjutnya, derivatif lemah order α dari fungsi *f* dapat ditulis sebagai $D_w{}^{\alpha} f = g$.

Dari konsep tersebut, muncul hubungan antara derivatif sesungguhnya dengan derivatif lemah. Jika fungsi *f* mempunyai derivatif pada Ω maka fungsi f mempunyai derivatif lemah pada Ω. Sebaliknya belum tentu berlaku, berikut diberikan contoh penyangkal

Contoh 2.3. Misal $n = 1$, $\Omega = [-1, 1]$ dan $f(x) = 1 - |x|$. Telah diketahui bahwa fungsi f tidak memiliki derivatif pada Ω namun terdapat fungsi $g: \Omega \to \mathbb{R}$ dengan

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ -1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

yang merupakan derivatif lemah order 1 dari fungsi *f*.

Ruang Sobolev merupakan bagian dari ruang Lebesgue dimana konsep derivatif lemah diterapkan. Diberikan $m \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$terbatas dan fungsi $f \in L^p(\Omega)$ dengan $D_w{}^{\alpha} f$ ada, untuk setiap α dengan $|\alpha| \leq m$. Ruang Sobolev didefinisikan

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | D_w{}^{\alpha} f \in L^p(\Omega), \forall \alpha\ \ni |\alpha| \leq m\}, 1 \leq p \leq \infty.$$

Jelas bahwa $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Norm Sobolev didefinisikan dengan

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D_w{}^{\alpha} f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leq m} |D_w{}^{\alpha} f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty,$$

dan untuk $p = \infty$,

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D_w{}^{\alpha} f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \overset{ess\ sup}{\Omega} |D_w{}^{\alpha} f(x)|.$$

3. Ruang Bochner

Solusi sistem reaksi-difusi bergantung dua peubah sekaligus yaitu posisi $x \in \Omega$ dan waktu $t \in (0, T)$. Ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ hanya mengukur kemulusan terhadap peubah ruang, sehingga belum cukup

untuk menggambarkan bagaimana solusi berubah terhadap waktu. Dalam analisis PDP evolusi, cara yang lazim adalah memandang $u(x,t)$ sebagai lintasan $t \mapsto u(.,t)$ yang nilainya pada setiap waktu adalah sebuah fungsi spasial, yaitu elemen suatu ruang Banach X [2]. Pandangan ini memisahkan peran ruang dan waktu: regularitas spasial diatur oleh ruang nilai X, sedangkan regularitas temporal diatur oleh jenis ruang lintasannya. Ruang Bochner adalah ruang lintasan tersebut. Ruang ini memperluas ruang $L^p(\Omega)$ klasik ke fungsi yang bernilai dalam ruang Banach, dengan integral Bochner sebagai pengganti integral Lebesgue[6] [15]. Beberapa ruang Bochner yang dibentuk guna mendukung analisis eksistensi solusi lemah sistem reaksi-difusi adalah

$$L^2((0,T);\, W^{1,2}(\Omega)) = \left\{u\colon (0,T) \to W^{1,2}(\Omega) \middle| \int_0^T \|u(t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} dt < \infty\right\}.$$

Ruang fungsi kontinu :

$$C([0,T]; L^2(\Omega)) = \{u\colon [0,T] \to L^2(\Omega) \mid \ \|u(.,t) - u(.,t_0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \ untuk\ t \to t_0\}.$$

$$C^1([0,T]; W^{1,2}(\Omega)) = \{u\colon [0,T] \to W^{1,2}(\Omega) \mid \ u'(.,t) \ ada\ di\ setiap\ t \in [0,T] \text{ dan } \|u'(.,t) - u'(.,t_0)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0 \ untuk\ t \to t_0\}.$$

Densitas pada Ruang Sobolev

Ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ berisi fungsi yang memiliki derivatif lemah, sehingga anggotanya tidak harus mulus, bahkan tidak harus kontinu. Di sisi lain, banyak teknik dalam analisis PDP, seperti integrasi parsial dan identitas Green, dibuktikan untuk fungsi mulus. Untuk menjembatani keduanya, cara yang dapat digunakan adalah membuktikan terlebih dulu untuk fungsi mulus, lalu memperluasnya ke seluruh ruang dengan mengambil limit. Cara ini berhasil jika sifat tersebut kontinu terhadap norm ruangnya, dan jika fungsi mulus dapat mendekati setiap anggota ruang itu. Syarat kedua inilah yang disebut kepadatan atau densitas. Dalam analisis fungsional, konsep densitas berkaitan dengan kemampuan suatu himpunan bagian untuk mendekati setiap elemen dalam ruang yang lebih besar [2], [3].
"Diberikan (X,d) ruang metrik dan $S \subset T \subset X$. Himpunan *S* dikatakan padat atau dense di dalam *T* jika untuk setiap $x \in T$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat $y \in S$ sehingga $d(y,x) < \varepsilon$".
Pernyataan dense di atas dapat juga dituliskan :
"Himpunan *S* dikatakan padat atau dense di dalam *T* jika untuk setiap $x \in T$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat barisan $\{y_n\} \subset S$ konvergen ke x".

Teorema 2.4 [3] *Jika* $p \in [1,\infty)$ *dan* $m \geq 0$ *maka himpunan* $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ *dengan* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *terbatas, dense di dalam* $W^{m,p}(\Omega)$.

Bukti. Ambil sebarang $u \in W^{m,p}(\Omega)$ dan $\varepsilon > 0$. Akan dibuktikan terdapat $v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ sedemikian hingga $\|u - v\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$. Misal dibentuk $\psi_1, \psi_2, \ldots$ partisi kesatuan dengan memilih $s_i \in \left(0, \frac{1}{i}\right)$ sedemikian $K_i \equiv supp\ (\psi_i) + cl(B_{s_i}(0)) \subset \Omega$. Jika $t \in (0, s_i)$ maka berdasarkan sifat mollifier [2], [3], [4] yaitu

$$J_t * (u\psi_i) \in C_0^m(\Omega),\ supp(J_t * (u\psi_i)) \subset K_i$$

sehingga berlaku

$$\left\|J_{t_i} * (u\psi_i) - u\psi_i\right\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^i}, \text{ untuk suatu } t_i \in \left(0, \frac{1}{i}\right),\ t_i < s_i. \quad (1)$$

Pilih $x \in \Omega$ dan misal $r > 0$ sedemikian hingga $cl(B_{2r}(x)) \subset \Omega$. Terdapat suatu bilangan asli $m > \frac{1}{r}$ sedemikian hingga $\psi_i = 0$ pada $cl(B_{2r}(x))$ untuk setiap $i > m$. Mudah dilihat bahwa $J_{t_i} * (u\psi_i) = 0$ pada $B_r(x)$ untuk $i > m$. Maka dari itu, jika $v = \sum_{i=1}^{\infty} J_{t_i} * (u\psi_i)$, maka $v \in C^\infty(\Omega)$, sehingga berlaku $u - v = \sum_{i=1}^{\infty} u\psi_i - J_{t_i} * (u\psi_i)$ hampir dimana-mana. Pertidaksamaan (1) menyimpulkan bahwa $u -$

$v \in W^{m,p}(\Omega)$ maka $\|u - v\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$. Oleh karena $u - v \in W^{m,p}(\Omega)$ dan $u \in W^{m,p}(\Omega)$ maka $v \in W^{m,p}(\Omega)$. Jadi untuk setiap $u \in W^{m,p}(\Omega)$ dan $\varepsilon > 0$, ada $v \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ sedemikian hingga $\|u - v\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$. ■

Solusi Lemah

Dalam teori klasik Persamaan Diferensial Parsial (PDP), sebuah solusi didefinisikan sebagai solusi klasik (*strong/classical solution*), yaitu fungsi yang memiliki turunan parsial kontinu hingga tingkat orde persamaan tersebut $u \in C^k(\Omega)$ Namun, dalam aplikasi seperti dinamika fluida, persamaan gelombang, transisi fase, maupun sistem reaksi-difusi non-linear, pendekatan solusi klasik ini menemui keterbatasan yaitu adanya syarat turunan yang terlalu ketat karena banyak masalah nilai batas atau kondisi awal yang memiliki data tidak mulus. Untuk mengatasi hambatan ini, konsep turunan "dipindahkan" dari fungsi solusi ke sebuah fungsi uji (*test function*) yang mulus via teknik pengintegralan parsial (*integration by parts*). Pendekatan ini melahirkan konsep solusi lemah.

Diberikan operator diferensial parsial $L: C^m(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ yaitu $L(u) := \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha D^\alpha u,\ A_\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Bentuk adjoint dari operator diferensial tersebut adalah $L * u = \sum_{|\alpha| \le m} |-1|^\alpha D^\alpha (A_\alpha u)$. Jika persamaan diferensial parsial diberikan sebagai $Lu = f$ maka fungsi *u* merupakan solusi dari persamaan diferensial tersebut. Menurut [2] Fungsi *u* disebut solusi lemah dari persamaan $Lu = f$ jika fungsi *u* memenuhi $(u, L * \phi) = (f, \phi)$ dimana $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ dan $L *$ operator adjoint. Setiap fungsi *f* yang terintegral lokal pada $\mathbb{R}^n$ dapat mendefinisikan suatu fungsional linear kontinu *F* pada $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ yaitu $F(\phi) = (f, \phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$, dengan $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Metode Faedo-Galerkin

Metode ini merupakan gabungan pemikiran dari matematikawan Rusia Boris Galerkin (1915) dan matematikawan Italia Sandro Faedo (1949). Awalnya Boris Galerkin memperkenalkan metode aproksimasi proyeksi (*Galerkin method*) untuk menyelesaikan masalah mekanika struktur dan elastisitas statis (PDP tipe elliptik), yang kemudian Sandro Faedo mengembangkan dan memperluas gagasan Galerkin untuk menangani masalah dinamis bergantung waktu (*evolution equations* / PDP parabola dan hiperbolik). Faedo membuktikan bahwa skema proyeksi ini dapat digunakan secara sistematis untuk mengonstruksi barisan solusi aproksimasi terhitung yang terbukti konvergen ke solusi persamaan evolusi [2], [3], [5], [16] .Tujuan utama dari metode Faedo–Galerkin adalah menjembatani masalah PDP dimensi tak-hingga menjadi sistem PDB dimensi terhingga melalui langkah-langkah sistematis berikut:

1. Diskretisasi Spasial (Proyeksi ke V_m)
   Pilih basis himpunan ortogonal terhitung $\{w_k\}$ yang padat (*dense*) di ruang Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. Masalah diproyeksikan ke sub-ruang dimensi terhingga $V_m = span\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$.
2. Transformasi menjadi Sistem PDB
   Solusi dicari dalam bentuk kombinasi linear
   $$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^m(t) w_k(x) \text{ dan } v_m(x,t) = \sum_{p=1}^{m} d_p^m(t) w_p(x).$$
   Proyeksi ini mereduksi PDP menjadi sistem PDB untuk koefisien waktu
   $$y(t) = (c_1^m, c_2^m, \ldots, c_m^m, d_1^m, d_2^m, \ldots, d_m^m)(t) \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Sistem Reaksi-Difusi Schnakenberg

Pada dasarnya, motivasi utama lahirnya model ini berakar dari fenomena morfigenesisi yang dicetuskan oleh Alan Turing [8] serta pencarian sistem reaksi kimia buatan (*synthetic chemical networks*) yang mampu menunjukkan perilaku siklus limit (*limit cycle behavior*) dan pembentukan pola spasiotemporal

secara mandiri. Secara spesifik, J. Schnakenberg [7] ingin mengonstruksi mekanisme reaksi kimia hipotetis paling sederhana yang memiliki sifat *autocatalytic* (reaksi yang produknya memicu reaksinya sendiri) namun tetap mematuhi prinsip termodinamika non-ekuilibrium. Schnakenberg mengusulkan sistem reaktan dengan dua variabel konsentrasi zat kimia, sebut saja $u(x,t)$ dan $v(x,t)$, dimana zat u diproduksi diproduksi melalui tahap autokatalisis kubik $2u + v \to 3u$. Fenomena kimiawi ini secara alamiah memunculkan suku non-linear bertingkat tinggi u^2v [10]. Ketika zat reaktan u dan v berada dalam suatu domain spasial tertutup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pergerakan acak molekul memicu fenomena difusi. Menggabungkan hukum konservasi massa Fick dengan kinetika reaksi Schnakenberg, lahirlah sistem Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Reaksi-Difusi terpasang:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = a - u + u^2 v, (x,t) \in \Omega x (0,T) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = b - u^2 v, (x,t) \in \Omega x (0,T) \end{cases}$$

Dengan syarat batas Neumann homogen $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ pada $\partial\Omega$ (menandakan tidak ada fluks zat masuk/keluar domain) dan kondisi awal $u(x,0) = u_0(x)$, $v(x,0) = v_0(x), x \in \Omega$ dimana $u_0, v_0 \in L^2$. Koefisien $d_1, d_2 > 0$ adalah koefisien difusi sedangkan $a, b > 0$ merepresentasikan laju suplai reaktan. Buku klasik J. D. Murray [9] mendokumentasikan bagaimana ketidakstabilan Turing (*diffusion-driven instability*) pada sistem PDP ini mampu menjelaskan pola-pola biologis dinamis seperti bercak pada kulit hewan, konsentrasi kalsium dalam sel, hingga pembentukan pola konsentris pada reaksi kimia.

Metode Penelitian

Pencarian solusi klasik sistem (1) sulit dilakukan secara langsung. Data awal umumnya hanya terintegral dan belum tentu mulus. Suku kubik u^2v juga menimbulkan risiko teknis. Sistem reaksi-difusi dengan kontrol massa dan nonlinieritas superkuadratik, solusi dapat meledak dalam waktu hingga bila struktur tambahan tidak dimanfaatkan [17], [18]. Karena itu, kajian eksistensi umumnya beralih ke solusi lemah di ruang Bochner–Sobolev yang dikonstruksi dengan metode Faedo–Galerkin [2], [6].

Tahap-tahap penelitian sebagai berikut:

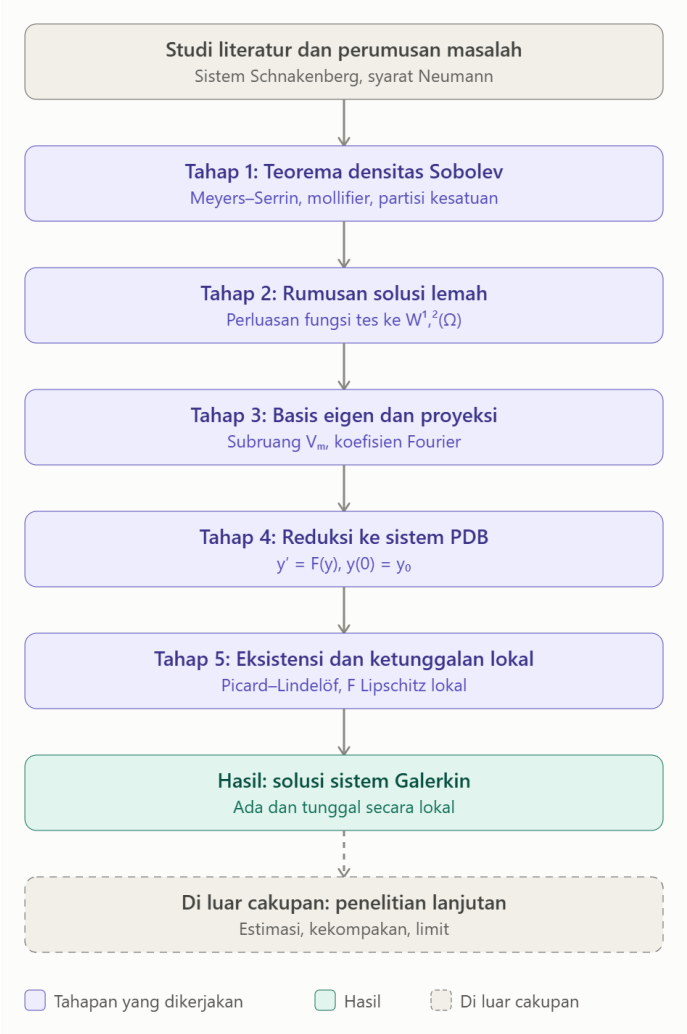
1. Ruang Fungsi
   - Langkah awal dalam menganalisis sistem Schnakenberg adalah memilih ruang fungsi yang tepat untuk mengandung kandidat solusi. Karena turunan spatial diukur dalam norm L^2 , ruang fungsi yang digunakan adalah ruang Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ [15], [19].
   - Menunjukkan sifat padat (densitas) dari ruang Sobolev [20],
2. Skema Galerkin
   - Membuktikan bahwa basis $\{w_k\}$ dapat mengaproksimasi elemen di $W^{1,2}(\Omega)$ dengan memanfaatkan teorema densitas Sobolev.
   - Memproyeksikan sistem PDP Schnakenberg ke sub ruang $V_m = span\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$
3. Eksistensi lokal solusi aproksimasi
   - Solusi aproksimasi dicari dalam bentuk kombinasi linear [5], [21]

     $u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k^m(t) w_k(x)$ dan $v_m(x,t) = \sum_{p=1}^{m} d_p^m(t) w_p(x)$.

     Langkah ini dapat mereduksi PDP Schnakenberg menjadi sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB) untuk koefisien waktu $y(t) = (c_1^m, c_2^m, \ldots, c_m^m, d_1^m, d_2^m, \ldots, d_m^m)(t) \in \mathbb{R}^{2m}$ dengan memanfaatkan Teorema Proyeksi Ortogonal pada ruang Hilbert [3].
   - Membuktikan bahwa suku nonlinear ${u_m}^2 v_m$ memenuhi syarat kontinu Lipschitz lokal.

- Dengan menggunakan Teorema Picard–Lindelöf [12] dapat disimpulkan bahwa solusi aproksimasi $u_m(.,t)$ dan $v_m(.,t)$ ada dan tunggal secara lokal pada interval waktu $[0,\tau], \tau \leq T$.

Alur penelitian digambarkan dalam flowchart berikut :



Hasil dan Pembahasan

Diberikan $\Omega \in \mathbb{R}^2$, domain terbuka terbatas dengan batas $\partial\Omega$ licin dan $T > 0$.

Model Schnakenberg dituliskan sebagai masalah syarat awal dan batas sebagai berikut :

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u + a - u + u^2 v, (x,t) \in \Omega x(0,T) \\ v_t = d_2\Delta v + b - u^2 v, (x,t) \in \Omega x(0,T) \end{cases}$$
$$\partial_v u = \partial_v v = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega x(0,T) \qquad (2)$$
$$u(x,0) = u_0, v(x,0) = v_0, \quad x \in \Omega$$

Dengan :

$u(x,t)$: konsentrasi aktivator

$v(x,t)$: konsentrasi substrat/depletion

$d_1, d_2 > 0$: koefisien difusi

$a, b > 0$: parameter produksi/sumber

Diasumsikan $u_0, v_0 \in L^2(\Omega),\ u_0, v_0 \geq 0$.

Menurut definisi solusi lemah pada subbab sebelumnya, pasangan (u, v) dikatakan solusi lemah dari sistem (2) pada $[0, T]$ jika

$$u, v \in L^2((0,T);\ W^{1,2}(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)),$$
$$u_t, v_t \in L^2((0,T);\ (W^{1,2}(\Omega))*)$$

dengan $(W^{1,2}(\Omega))$* ruang dual dari $(W^{1,2}(\Omega))$ [3] .

Untuk setiap $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ berlaku

$$\int_\Omega u_t \varphi dx + d_1 \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(u,v)\varphi dx$$

dan

$$\int_\Omega v_t \varphi dx + d_2 \int_\Omega \nabla v . \nabla \varphi dx = \int_\Omega g(u,v)\varphi dx$$

hampir dimana-mana untuk setiap $t \in (0, T)$ serta $u(.,0) = u_0, v(.,0) = v_0$.

Menurut sifat densitas ruang Sobolev, $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ dense pada $W^{1,2}(\Omega)$ sehingga solusi lemah sistem (2) tidak hanya berlaku untuk setiap $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ tetapi juga berlaku untuk setiap $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Itu berarti u, v solusi lemah dari Sistem (2) berturut-turut jika

$$\int_\Omega u_t \varphi dx + d_1 \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(u,v)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{3}$$

dan

$$\int_\Omega v_t \varphi dx + d_2 \int_\Omega \nabla v . \nabla \varphi dx = \int_\Omega g(u,v)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{4}$$

Ambil sembarang basis orthonormal $\{w_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$.

Didefinisikan $V_m \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ adalah subruang berdimensi hingga dimana $V_m = span\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$.

Lemma 4.1 Jika $u_m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k^m(t) w_k(x)$, $v_m(x,t) = \sum_{p=1}^m d_p^m(t) w_p(x)$ dan $u_m, v_m \in C^1([0,T]; V_m)$ berturut-turut solusi masalah Galerkin ke- m

$$\int_\Omega \partial_t u_m . \varphi dx + d_1 \int_\Omega \nabla u_m . \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(u_m, v_m)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in V_m, j = 1,2,..,m, \tag{5}$$

dan

$$\int_\Omega \partial_t v_m . \varphi dx + d_2 \int_\Omega \nabla v_m . \nabla \varphi dx = \int_\Omega g(u_m, v_m)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in V_m, j = 1,2,..,m. \tag{6}$$

maka PDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = a - u + u^2 v, (x,t) \in \Omega x (0,T) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = b - u^2 v, (x,t) \in \Omega x (0,T) \end{cases}$$

dapat direduksi menjadi sistem PDB dalam koefisien waktu

$$\begin{cases} \dot{c}_j^m(t) = F_j(c^m, d^m) \\ \dot{d}_j^m(t) = G_j(c^m, d^m) \end{cases}$$

dengan

$c^m = (c_1^m, c_2^m, \dots, c_m^m)$,

$d^m = (d_1^m, d_2^m, \dots, d_m^m)$,

$F_j(c^m, d^m) = -d_1 \lambda_j c_j^m(t) + a \int_\Omega w_j dx - c_j^m(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k . w_l . w_p . w_j dx,$

$G_j(c^m, d^m) = -d_2 \lambda_j d_j^m(t) + b \int_\Omega w_j dx - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k . w_l . w_p . w_j dx,$

dimana $j = 1,2,..,m$.

Bukti. Diketahui $u_m, v_m \in C^1([0,T]; V_m)$ solusi masalah Galerkin ke- m [2] maka (5) berlaku untuk $\varphi \in V_m$. Oleh karena V_m berdimensi hingga dan dibentuk oleh $w_1, w_2, \dots, w_m$ maka untuk suatu $\varphi = w_j \in V_m$ berlaku

$$\underbrace{\int_\Omega \partial_t u_m w_j dx}_{*} + \underbrace{d_1 \int_\Omega \nabla u_m . \nabla w_j dx}_{**} = \underbrace{\int_\Omega f(u_m, v_m) w_j dx}_{***}, \quad \forall w_j \in V_m, j = 1,2,..,m, \qquad (5a)$$

dan

$$\int_\Omega \partial_t v_m w_j dx + d_2 \int_\Omega \nabla v_m . \nabla w_j dx = \int_\Omega g(u_m, v_m) w_j dx, \quad \forall w_j \in V_m, j = 1,2,..,m. \qquad (6a)$$

Analisis ruas (*) dilakukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_t u_m w_j dx &= \int_\Omega \sum_{k=1}^m \dot{c}_k^m(t) w_k(x) w_j(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^m \dot{c}_k^m(t) \int_\Omega w_k(x) w_j(x) dx = \dot{c}_j^m(t). \end{aligned} \qquad (7)$$

Analisis ruas (**) dilakukan sebagai berikut

$$d_1 \int_\Omega \nabla u_m . \nabla w_j dx = d_1 \sum_{k=1}^m c_k^m(t) \int_\Omega \nabla w_k(x) \nabla w_j dx. \qquad (8)$$

Menurut Teorema Spektral untuk operator self-adjoint kompak [22], berlaku untuk setiap domain Ω terbatas dengan syarat batas Neumann terdapat pasangan (λ_k, w_k) yang memenuhi

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k \text{ di } \Omega \quad \text{dan} \quad \partial_\nu w_k = 0 \text{ di } \partial\Omega,$$

sehingga

$$\int_\Omega (-\Delta w_k) w_j dx = \int_\Omega (\lambda_k w_k) w_j dx = \lambda_k \int_\Omega w_k w_j dx = \lambda_k \delta_{kj}, \qquad (9)$$

dimana

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Di lain pihak, dengan identitas Green dan syarat batas Neumann berlaku

$$\int_\Omega (-\Delta w_k) w_j dx = \int_\Omega \nabla w_k \,.\nabla w_j dx - \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu w_k) w_j dS = \int_\Omega \nabla w_k \,.\nabla w_j dx. \tag{10}$$

Dari (9) dan (10) maka diperoleh

$$\int_\Omega \nabla w_k \,.\nabla w_j dx = \lambda_k \delta_{kj}. \tag{11}$$

Jika (11) disubsitusikan ke (8) maka diperoleh

$$d_1 \int_\Omega \nabla u_m . \nabla w_j dx = d_1 \sum_{k=1}^m c_k^m(t) \lambda_k \delta_{kj} = d_1 \lambda_j c_j^m(t). \tag{12}$$

Analisis ruas (***) dilakukan sebagai berikut

$$\int_\Omega f(u_m, v_m) w_j dx = \int_\Omega (a - u_m + {u_m}^2 v_m) w_j dx$$
$$= a \int_\Omega w_j dx - \sum_{k=1}^m c_k^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_j dx + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_l \,.\, w_p \,.\, w_j dx$$
$$= a \int_\Omega w_j dx - c_j^m(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_l \,.\, w_p \,.\, w_j dx. \tag{13}$$

Dengan mensubstitusikan (7), (12), dan (13) ke (5a) diperoleh

$$\dot{c}_j^m(t) = -d_1 \lambda_j c_j^m(t) + a \int_\Omega w_j dx - c_j^m(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_l \,.\, w_p \,.\, w_j dx, \tag{14}$$

dimana $j = 1,2,..,m$.

Analog dengan (5a), analisis dilakukan pada persamaan (6a) sehingga diperoleh

$$\dot{d}_j^m(t) = -d_2 \lambda_j d_j^m(t) + b \int_\Omega w_j dx - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_l \,.\, w_p \,.\, w_j dx, \tag{15}$$

dimana $j = 1,2,..,m$.

Jika Sistem (14) dan (15) digabungkan maka akan diperoleh sistem $2m$ persamaan diferensial biasa dalam variabel t sehingga kedua sistem tersebut dapat ditulis sebagai sistem

$$\begin{cases} \dot{c}_j^m(t) = F_j(c^m, d^m) \\ \dot{d}_j^m(t) = G_j(c^m, d^m) \end{cases} \tag{16}$$

dengan

$c^m = (c_1^m, c_2^m, \ldots, c_m^m)$,

$d^m = (d_1^m, d_2^m, \ldots, d_m^m)$,

$F_j(c^m, d^m) = -d_1 \lambda_j c_j^m(t) + a \int_\Omega w_j dx - c_j^m(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_l \,.\, w_p \,.\, w_j dx,$

$G_j(c^m, d^m) = -d_2 \lambda_j d_j^m(t) + b \int_\Omega w_j dx - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m c_k^m(t) c_l^m(t) d_p^m(t) \int_\Omega w_k \,.\, w_l \,.\, w_p \,.\, w_j dx,$

dimana $j = 1,2,..,m$. ■

Sistem (16) dapat ditulis pula sebagai

$$\dot{y}(t) = F(y(t)),$$

dimana $y(t) = (c_1^m, c_2^m, \dots, c_m^m, d_1^m, d_2^m, \dots, d_m^m)(t) \in \mathbb{R}^{2m}$ dan $F: \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ dengan $F = (F_j, G_j)$.

Lemma 4.2 Diketahui $u_m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k^m(t) w_k(x)$, $v_m(x,t) = \sum_{p=1}^m d_p^m(t) w_p(x)$ solusi masalah Galerkin ke- m. Untuk setiap $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ terdapat $P_m u_0, P_m v_0 \in V_m$ yaitu

$$P_m u_0 := \sum_{k=1}^m \left(\int_\Omega u_0 w_k dx \right) w_k \text{ dan } P_m v_0 := \sum_{p=1}^m \left(\int_\Omega v_0 w_p dx \right) w_p$$

sedemikian sehingga

$$c_j^m(0) = \int_\Omega u_0 w_j dx \text{ dan } d_j^m(0) = \int_\Omega v_0 w_j dx.$$

Bukti. Jika $t = 0$ berlaku

$$u_m(x,0) = \sum_{k=1}^m c_k^m(0) w_k(x) \text{ dan } v_m(x,0) = \sum_{p=1}^m d_p^m(0) w_p(x).$$

Menurut Teorema proyeksi ortogonal [3], [19] berlaku untuk setiap $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ terdapat $P_m u_0, P_m v_0 \in V_m$

$$P_m u_0 := \sum_{k=1}^m \left(\int_\Omega u_0 w_k dx \right) w_k \text{ dan } P_m v_0 := \sum_{p=1}^m \left(\int_\Omega v_0 w_p dx \right) w_p.$$

Bentuk $E(c_1^m, c_2^m, \dots, c_m^m) := \| u_0 - \sum_{k=1}^m c_k^m(0) w_k \|_{L^2(\Omega)}^2$ maka

$$E = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \sum_{k=1}^m c_k^m \left(\int_\Omega u_0 w_k dx \right) + \sum_{k=1}^m (c_k^m(0))^2.$$

Untuk meminimalkan E terhadap $c_j^m(0)$ maka

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial c_j^m(0)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \int_\Omega u_0 w_j dx + 2 c_j^m(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow c_j^m(0) = \int_\Omega u_0 w_j dx. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh pula $d_j^m(0) = \int_\Omega v_0 w_j dx$. ■

Hal ini berakibat Sistem (16) mempunyai syarat awal

$$c_j^m(0) = \int_\Omega u_0 w_j dx = \langle u_0, w_j \rangle \text{ dan } d_j^m(0) = \int_\Omega v_0 w_j dx = \langle v_0, w_j \rangle$$

atau

$$y_0 := y(0) = (\langle u_0, w_1 \rangle, .., \langle u_0, w_m \rangle, \langle v_0, w_1 \rangle, .., \langle v_0, w_m \rangle) \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Teorema 4.3 (Eksistensi solusi aproksimasi) Sistem $2m$ persamaan diferensial biasa dalam variabel t

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(y(t)), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dimana $y(t) = (c_1^m, c_2^m, \dots, c_m^m, d_1^m, d_2^m, \dots, d_m^m)(t) \in \mathbb{R}^{2m}$ dan $F: \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ dengan $F = (F_j, G_j)$ pada Sistem (16) mempunyai tepat satu solusi $y \in C^1([0,\tau];\ \mathbb{R}^{2m}), \tau \leq T$.

Bukti. Ruas kanan Sistem (16) yaitu $F_j(c^m, d^m)$ dan $G_j(c^m, d^m)$ merupakan polinomial dalam c^m dan d^m dengan derajat tertingginya adalah derajat tiga. Itu artinya $F_j \in C^1(\mathbb{R}^{2m})$ dan $G_j \in C^1(\mathbb{R}^{2m})$. Ambil $\delta > 0$, bola tertutup $\bar{B}(0,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^{2m} |\ \|y\| \leq \delta\}$ kompak dan konveks. Turunan parsial F_j dan G_j bersifat kontinu dan terbatas pada $\bar{B}(0,\delta)$. Dengan demikian fungsi F_j dan G_j memenuhi kondisi Lipschitz lokal pada $\bar{B}(0,\delta) \subset \mathbb{R}^{2m}$. Menurut Teorema Picard-Lindelof, sistem (16) dengan syarat awal $y(0) = y_0$ mempunyai tepat satu solusi $y \in C^1([0,\tau];\ \mathbb{R}^{2m}), \tau \leq T$. ■

Kesimpulan

Penelitian ini membahas konstruksi solusi aproksimasi untuk sistem persamaan diferensial parsial Schnakenberg melalui metode Galerkin. Tahapan penelitian diawali dengan pembuktian sifat densitas ruang Sobolev yang menjadi landasan dalam pemilihan fungsi uji dan pendekatan terhadap solusi. Selanjutnya, sistem PDE diproyeksikan ke subruang berdimensi hingga yang dibangun dari sejumlah fungsi basis, sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa untuk koefisien-koefisien solusi aproksimasi. Eksistensi lokal dan ketunggalan solusi aproksimasi kemudian dianalisis melalui Teorema Picard-Lindelof yang diterapkan pada sistem berdimensi hingga yang telah dibangun sebelumnya.

Rangkaian tahapan tersebut memberikan kerangka analitis untuk mengkaji keberadaan solusi sistem Schnakenberg dalam formulasi lemah. Meskipun demikian, eksistensi solusi lemah untuk sistem PDE secara keseluruhan memerlukan pembuktian estimasi a priori yang seragam terhadap dimensi aproksimasi, diikuti dengan ekstraksi barisan konvergen dan proses limit untuk memperoleh solusi yang memenuhi formulasi lemah sistem. Dengan demikian, metode Galerkin menjadi pendekatan sistematis untuk menghubungkan konstruksi solusi berdimensi hingga dengan analisis eksistensi solusi lemah sistem PDE.

Referensi

[1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*. Academic Press, 2008.

[2] L. Evans, *Partial Differential Equations*, vol. 19. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. doi: 10.1090/gsm/019.

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York, NY: Springer New York, 2011. doi: 10.1007/978-0-387-70914-7.

[4] M. Miklavčič, *Applied functional analysis and partial differential equations*. World Scientific, 1998.

[5] M. J. Gander and G. Wanner, "From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing," *SIAM Review*, vol. 54, no. 4, pp. 627–666, Jan. 2012, doi: 10.1137/100804036.

[6] T. Roubíček, *Nonlinear partial differential equations with applications*, 2nd ed. Birkhäuser, 2013.

[7] J. Schnakenberg, "Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour," *J. Theor. Biol.*, vol. 81, no. 3, pp. 389–400, Dec. 1979, doi: 10.1016/0022-5193(79)90042-0.

[8] A. M. Turing, "The chemical basis of morphogenesis," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, vol. 237, no. 641, pp. 37–72, Aug. 1952, doi: 10.1098/rstb.1952.0012.

[9] J. D. Murray, *Mathematical biology I: An introduction*. Springer, 2002.

[10] B. Li and X. Zhang, "Steady states of a Sel'kov-Schnakenberg reaction-diffusion system," *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, vol. 10, no. 5, pp. 1009–1023, 2017, doi: 10.3934/dcdss.2017053.

[11] M. J. Ward and J. Wei, "The Existence and Stability of Asymmetric Spike Patterns for the Schnakenberg Model," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 109, no. 3, pp. 229–264, Oct. 2002, doi: 10.1111/1467-9590.00223.

[12] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. doi: 10.1137/1.9780898719222.

[13] H. L. . Royden and Patrick. Fitzpatrick, *Real analysis*. Pearson, 2014.

[14] G. B. . Folland, *Real Analysis : Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, Incorporated, Wiley, 2013.

[15] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces*. Cham: Springer International Publishing, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-48520-1.

[16] Y. Dong, S. Li, and S. Zhang, "Hopf bifurcation in a reaction–diffusion model with Degn–Harrison reaction scheme," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 33, pp. 284–297, Feb. 2017, doi: 10.1016/j.nonrwa.2016.07.002.

[17] M. Pierre and D. Schmitt, "Blowup in Reaction-Diffusion Systems with Dissipation of Mass," *SIAM Review*, vol. 42, no. 1, pp. 93–106, Jan. 2000, doi: 10.1137/S0036144599359735.

[18] M. Pierre, "Global Existence in Reaction-Diffusion Systems with Control of Mass: a Survey," *Milan Journal of Mathematics*, vol. 78, no. 2, pp. 417–455, Dec. 2010, doi: 10.1007/s00032-010-0133-4.
[19] Walter. Rudin, *Functional analysis*. McGraw-Hill Education (India), 2006.
[20] N. G. Meyers and J. Serrin, "H = W," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 51, no. 6, pp. 1055–1056, Jun. 1964, doi: 10.1073/pnas.51.6.1055.
[21] R. A. Obaid and G. A. Al-Juaifri, "Existence and Uniqueness of the Solution to the Reaction-Diffusion System of FHN type," *Iraqi Journal of Science*, pp. 1239–1259, Mar. 2025, doi: 10.24996/ijs.2025.66.3.22.
[22] E. Kreyzig, *Introductory to functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1989.