

Komutatif Matriks ordo 2×2 Atas Aljabar Max-Plus

Any Muanalifah

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Islam Negeri Walisongo Semarang 50185, Indonesia

Korespondensi; Any Muanalifah, Email: any.muanalifah@walisongo.ac.id

Abstrak

Pada aljabar klasik, tidak semua matriks saling komutatif, begitu juga di aljabar max-plus. Pada artikel ini kita akan mereview dan mengkaji tentang komutatif matriks ordo 2×2 atas aljabar max-plus dimana kita akan buktikan bahwa $A \otimes B = B \otimes A$. Kemudian kita akan mengelompokkan kedalam beberapa kelas matriks komutatif diantaranya matriks normal, matriks circulant, matriks segitiga atas, segitiga bawah dan generalisasi matriks Kleenestar.

Kata Kunci: Aljabar max-plus, komutatif matriks, matriks normal, matriks circulant, generalisasi matriks Kleenestar.

Abstract

In classical algebra, not all matrices are commutative, as well as in max-plus algebra. In this article we will survey and discuss the commutative matrix ordo 2×2 over max-plus algebra, and we will prove that $A \otimes B = B \otimes A$. Then we divide into several classes including normal matrices, circulant matrices, upper triangular matrices, lower triangular matrices and generalized Kleenestar matrices.

Keywords: max-plus algebra, commutative matrices, normal matrices, circulant matrices, generalisation of Kleenestar matrices.

Pendahuluan

Matriks merupakan teori fundamental dalam aljabar linear yang mempunyai terapan yang sangat luas di matematika dan berbagai ilmu lainnya seperti fisika, Teknik, ilmu computer dan ekonomi. Matriks pada aljabar klasik menggunakan operasi perkalian dan penjumlahan yang sangat erat dengan sifat komutatif dan assosiatif. Dalam aljabar klasik tidak semua matriks mempunyai sifat komutatif. Beberapa matriks yang bersifat komutatif diantaranya, matriks *circulant*, matriks idempotent dan matriks diagonal.

Dalam beberapa tahun terakhir, struktur aljabar baru yang disebut aljabar max-plus. Aljabar max-plus adalah salah satu contoh semiring yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $\oplus$ yang berarti maximum dan $\otimes$ yang berarti penjumlahan. Beberapa aplikasi aljabar max-plus diantaranya cryptography [1] [2] [3], scheduling [4], and optimization [5]. *Theoretical Computer Science*. Beberapa penelitian juga muncul tentang matriks dalam aljabar max-plus diantaranya basis dalam aljabar max-plus [6], rank matriks dalam aljabar max-plus [7] [8] [9] dan semigrup atas matriks dalam aljabar max-plus [10] [11] [12].

Konsep komutatif matriks dalam aljabar max-plus juga analog dengan konsep komutatif matriks pada aljabar klasik. Beberapa penelitian yang membahas tentang komutatif matriks dalam aljabar max-

plus telah dilakukan oleh [13] [14] [15] [16] dan aplikasi komutatif matriks atas aljabar max-plus dalam *cryptography* [17].

Diberikan himpunan semua matriks ukuran 2×2 atas aljabar max-plus dan dinotasikan dengan $M_2(\mathbb{R}_{max})$. Selanjutnya akan dibahas tentang komutatif matriks atas $M_2(\mathbb{R}_{max})$. Pada penelitian ini kita akan membagi matriks-matriks yang saling komutatif pada beberapa kelas.

Landasan Teori

Pada bagian ini akan dibahas beberapa definisi dasar aljabar max-plus. Sebelum membahas aljabar max-plus terlebih dahulu diberikan definisi semiring

Definisi 1. Misal R adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$. Struktur aljabar $(R, +, \cdot)$ disebut semiring jika memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(R, +)$ merupakan monoid komutatif
 - (i) Asosiatif
 $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - (ii) Mempunyai elemen identitas
Ada $0 \in R$ sedemikian hingga $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in R$
 - (iii) Komutatif
 $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
2. $(R, \cdot)$ merupakan monoid
 - (i) Asosiatif
 $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
 - (ii) Mempunyai elemen identitas
3. $(R, +, \cdot)$ mempunyai sifat distributive $\forall a, b, c \in R$ berlaku
 - (i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 - (ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
4. Mempunyai elemen penyerap
Ada $a \in R$ sehingga $a \cdot 0 = 0 \cdot a, \forall a \in R$

Semiring juga mempunyai sifat-sifat khusus seperti idempotent dan komutatif yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2. Misal R adalah semiring dan untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + a = a$ maka R disebut semiring idempoten.

Definisi 3. Misal R adalah semiring dan untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \times b = b \times a$ maka R disebut semiring komutatif.

Contoh 4. Diberikan himpunan bilangan $\mathbb{R}$ yang diperluas dengan $-\infty$ dan dilengkapi dengan dua operasi bilangan $\oplus$ (maksimum) dan $\otimes$ (penjumlahan). Struktur aljabar $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ yang memenuhi definisi semiring disebut aljabar max-plus dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$ didefinisikan

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

dan

$$a \otimes b = a + b$$

Operasi aritmatika dasar pada aljabar max-plus dapat diperluas ke operasi aritmetika vektor dan matriks sebagai berikut:

1. Penjumlahan matriks

Misal $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ maka didefinisikan

$$(a \oplus b)_{ij} = \max (a_{ij} \cdot b_{ij})$$

untuk semua $i, j \in \mathbb{N}$.

2. Perkalian matriks

Misal $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{m \times p}$ dan $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{p \times n}$ maka didefinisikan

$$(a \otimes b)_{ij} = \max_k (a_{ik} + b_{kj})$$

untuk semua $i, j \in \mathbb{N}$.

3. Perkalian matriks dari skalar

Misal $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$ maka didefinisikan

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = (\alpha + a_{ij})$$

untuk semua $i, j \in \mathbb{N}$.

Berikut juga akan diberikan beberapa definisi penting matriks dalam aljabar Max-Plus

Definisi 5. Matriks identitas atas aljabar Max-plus dinotasikan dengan I_n dimana entri-entri pada diagonal utama sama dengan 0 dan entri-entri pada non diagonal utama sama dengan $-\infty$.

Definisi 6. Matriks diagonal atas aljabar Max-plus dinotasikan dengan D_n di mana entri-entri pada diagonal utama adalah sebarang bilangan di $\mathbb{R}_{max}$ dan entri-entri pada non diagonal utama adalah $-\infty$. Biasanya matriks diagonal ditulis sebagai $D_n = (d_1, d_2, \dots, d_n)^{-1}$ dimana $d_1, d_2, \dots, d_n$ adalah entri-entri pada diagonal utama.

Sebelum kita memperkenalkan hak kelas-kelas matriks komutatif dalam aljabar Max-plus berikut ini akan diberikan definisi dua matriks dikatakan saling komutatif

Definisi 7. Misal $A, B \in \mathbb{R}_{max}^n$ maka A dan B dikatakan komutatif jika $A \otimes B = B \otimes A$.

Penelitian ini menggunakan studi literature dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengkaji artikel tentang aljabar Max-plus dan matriks komutatif atas aljabar klasik
2. Mengkaji tentang matriks atas aljabar Max-plus
3. Mengkaji matriks komutatif ordo 2×2 atas aljabar Max-plus
4. Mengkaji kelas-kelas matriks komutatif ordo 2×2 atas aljabar Max-plus
5. Menarik kesimpulan

Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini kita berfokus pada matriks ukuran 2×2 yang saling kamutatif dalam aljabar Max-Plus.

Matriks Normal

Berikut ini akan diberikan definisi matriks normal.

Definisi 8. Matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^n$ disebut matriks normal jika $a_{ii} = 0$ dan $-\infty \leq a_{ij} \leq 0$.

Selanjutnya matriks normal dalam aljabar max-plus dinotasikan sebagai M_n^{nor} .

Linde de lapuente [13] membuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in M_2^{nor}$ yaitu matriks normal dengan ordo 2×2 maka A dan B saling komutatif seperti pada lemma berikut:

Lemma 9. Diberikan $A, B \in M_2^{nor}$ maka $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$.

Bukti. Ambil sebarang $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_2^{nor}$ untuk $i, j \in [1, 2]$ maka didapatkan

$$(A \otimes B)_{11} = \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{21}) = 0$$

$$(A \otimes B)_{12} = \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{22}) \\ = \max(b_{12} + a_{12})$$

$$(A \otimes B)_{21} = \max(a_{21} + b_{11}, a_{22} + b_{21}) \\ = \max(a_{21} + b_{21})$$

$$(A \otimes B)_{22} = \max(a_{21} + b_{12}, a_{22} + b_{22}) \\ = 0$$

Selanjutnya akan kita cek $(A \otimes B)_{ij}$ dengan $i, j \in [1, 2]$ sebagai berikut:

$$(A \otimes B)_{11} = \max(b_{11} + a, b_{12} + a_{21}) \\ = 0$$

$$(A \otimes B)_{21} = \max(b_{11} + a_{12}, b_{12} + a_{22}) \\ = \max(a_{12} + b_{12})$$

$$(A \otimes B)_{22} = \max(b_{21} + a_{12}, b_{22} + a_{22}) \\ = 0$$

Kita akan periksa $(A \oplus B)_{ij}$. Diperhatikan bahwa, untuk setiap $i, j \in [1, 2]$ diperoleh

$$(A \oplus B)_{11} = \max(a_{11}, b_{12}) = 0$$

$$(A \oplus B)_{12} = \max(a_{12}, b_{12})$$

$$(A \oplus B)_{21} = \max(a_{21}, b_{21})$$

$$(A \oplus B)_{22} = \max(a_{22}, b_{22}) = 0$$

Jadi dari hasil yang ada dapat disimpulkan bahwa $A \otimes B = B \otimes A = A \oplus B$. ■

Tetapi Lemma 3.2 ini tidak berlaku untuk $n \geq 3$ seperti pada contoh berikut ini

Contoh 10. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Maka $A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dapat dilihat disini bahwa $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Selanjutnya definisi matriks normal dapat di generalisasi sebagai berikut:

Definisi 11. Misalkan $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^n$ maka M dikatakan k -matriks normal jika memenuhi

$$m_{ij} = \begin{cases} k & \text{untuk } i = j, k \in \mathbb{R}_{max}^+ \\ \mathbb{R}^{\leq 0} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

dan dinotasikan dengan M_n^{k-nor} .

Teorema 12. Misalkan $A \in M_2^{k-nor}$ dan $B \in M_2^{l-nor}$ maka $A \otimes B = B \otimes A = l \otimes A \oplus k \otimes B$.

Bukti. Misal $A \in M_2^{k-nor}$ dimana $A = \begin{bmatrix} k & a_{12} \\ a_{21} & k \end{bmatrix}$ dan $B \in M_2^{l-nor}$ dimana $B = \begin{bmatrix} l & b_{12} \\ b & l \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} l & a_{12} \\ a_{21} & l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} l & b_{12} \\ b_{21} & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(k+l, a_{12}+b_{21}) & \max(k+b_{12}, a_{12}+l) \\ \max(a_{21}+l, k+b_{21}) & \max(a_{21}+b_{12}, k+l) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k+l & \max(k+b_{12}, a_{12}+l) \\ \max(a_{21}+l, k+b_{21}) & k+l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \otimes A &= \begin{bmatrix} l & b_{12} \\ b_{21} & l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} l & a_{12} \\ a_{21} & l \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(l + a, b_{12} + a_{21}) & \max(l + a_{12}, b_{12} + k) \\ \max(b_{21} + k, l + a_{21}) & \max(b_{21} + a_{12}, l + k) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l + k & \max(l + a_{12}, b_{12} + k) \\ \max(b_{21} + k, l + a_{21}) & l + k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dapat kita lihat bahwa $A \otimes B = B \otimes A$. ■

Matriks Circulant

Seperti pada aljabar klasik, matriks *circulant* atas aljabar max-plus juga bersifat komutatif. Berikut ini teorema yang menjamin 2 buah matriks circulant ukuran 2×2 bersifat komutatif.

Teorema 13. Misal A, B adalah matriks circulant 2×2 maka $A \otimes B = B \otimes A$.

Bukti. Misal A dan B adalah matriks circulant dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \end{bmatrix}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}) & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{11}) \\ \max(a_{12} + b_{11}, a_{11} + b_{12}) & \max(a_{12} + b_{12}, a_{11} + b_{11}) \end{bmatrix} \text{ dan} \\
B \otimes A &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(b_{11} + a_{12}, b_{12} + a_{12}) & \max(b_{11} + a_{12}, b_{12} + a_{11}) \\ \max(b_{12} + a_{11}, b_{11} + a_{12}) & \max(b_{12} + a_{12}, b_{11} + a_{11}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dapat kita lihat bahwa $A \otimes B = B \otimes A$. ■

Matriks Segitiga Atas dan Segitiga Bawah

Sama seperti dalam aljabar klasik, tidak semua matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah pada aljabar max-plus bersifat komutatif. Berikut ini diberikan teorema yang menyatakan dua matriks segitiga atas (matriks segitiga bawah) yang saling komutatif.

Teorema 14. Diberikan matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks segitiga atas (segitiga bawah) ukuran 2×2 di aljabar max-plus jika $a_{ij} = k, b_{ij} = l$ untuk $k, l \in \mathbb{R}_{\max}^+$ maka $A \otimes B = B \otimes A = l \otimes A \oplus k \otimes B$.

Bukti. Misal A dan B adalah matriks segitiga atas dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\infty & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -\infty & b_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\infty & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\infty & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(a_{11} + b_{11}, a_{12} + (-\infty)) & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) \\ \max((-\infty) + b_{11}, a_{22} + (-\infty)) & \max((-\infty) + b_{12}, a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \max(a_{11} + b_{12}, a_{12} + b_{22}) \\ -\infty & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k + l & \max(k + b_{12}, a_{12} + l) \\ -\infty & k + l \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \otimes A &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -\infty & b_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -\infty & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max(b_{11} + a_{11}, b_{12} + (-\infty)) & \max(b_{11} + a_{12}, b_{12} + a_{22}) \\ \max((-\infty) + a_{11}, b_{22} + (-\infty)) & \max((-\infty) + a_{12}, b_{22} + a_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & \max(b_{11} + a_{12}, b_{12} + a_{22}) \\ -\infty & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l + k & \max(l + a_{12}, b_{12+k}) \\ -\infty & k + l \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dapat kita lihat $A \otimes B = B \otimes A$. Untuk matriks segitiga bawah, proses pengerjaannya analog dengan matriks segitiga atas. ■

Matriks Power dan Generalisasi Matriks Kleene Star

Dalam aljabar max-plus matriks power juga bersifat saling komutatif seperti pada aljabar klasik. Misal diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^n$ dan $k, l \in \mathbb{Z}_{max}^+$ maka diperoleh $A^k \otimes A^l = A^{k+l} = A^{l+k} = A^l \otimes A^k$. Selain pangkat bulat positif kita juga bisa membuktikan untuk $k, l \in \mathbb{R}_{max}$ sehingga $0 \leq k, l \leq 1$ dan $0 \leq k + l \leq 1$ maka $A^k \otimes A^l = A^{l+k}$. Akan tetapi sifat komutatif ini tidak berlaku untuk sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^n$.

Selanjutnya diperkenalkan generalisasi matriks Kleene star oleh Jones [19] sebagai berikut:

Definisi 15. Misal $A = (a_{ij})$ adalah matriks ukuran $n \times n$ atas aljabar max-plus yang memenuhi sifat berikut

$$a_{ij} \otimes a_{jk} \leq a_{ik} \otimes a_{jj}, \forall i, j, k \quad (1)$$

Kita sebut A sebagai generalisasi matriks Kleene star.

Selanjutnya akan diperkenalkan juga definisi matriks roots atas generalisasi matriks kleene star sebagai berikut.

Definisi 16. Misal A adalah generalisasi matriks A dan $\alpha \in \mathbb{R}$ maka matriks $A^{(\alpha)} = (a_{ij}^{(\alpha)})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij}^{(\alpha)} = a_{ij} \otimes (a_{ik} + a_{jj})^{\otimes \alpha - 1} \quad (2)$$

Berikut ini akan diberikan teorema yang menyatakan deformasi pada generalisasi matriks kleene star ukuran 2×2 saling komutatif.

Teorema 17. Untuk sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ dengan $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ maka $A^{(\alpha)} \otimes A^{(\beta)} = A^{(\beta)} \otimes A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+\beta)}$ dengan A generalisasi matriks Kleene star ukuran 2×2 .

Bukti. Misalkan $\alpha = \frac{a}{b}$ dan $\beta = \frac{c}{d}$ maka kita dapat menuliskan $\alpha = \frac{a}{b} \frac{d}{d}$ dan $\beta = \frac{c}{d} \frac{b}{b}$ maka $A^{(\alpha)} = A^{\frac{qd}{bd}} = \left(A^{\left(\frac{1}{bd}\right)}\right)^{\otimes ad}$ dan $A^{(\beta)} = A^{\frac{cb}{db}} = \left(A^{\left(\frac{1}{bd}\right)}\right)^{\otimes cb}$. Sehingga

$$A^{(\alpha)} \otimes A^{(\beta)} = \left(A^{\left(\frac{1}{bd}\right)}\right)^{\otimes ad} \otimes \left(A^{\left(\frac{1}{bd}\right)}\right)^{\otimes cb}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(A^{\left(\frac{1}{bd} \right)} \right)^{(ad+bc)} \\
 &= A^{\frac{ad+bc}{bd}} \\
 &= A^{(\alpha+\beta)}
 \end{aligned}$$

Dalam papernya Yangxinyu Xio [16] membuat generalisasi matriks A dan B yang saling komutatif. Misal diberikan matriks $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^2$ maka matriks $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{max}^2$ dikatakan komutatif dengan matriks A jika memenuhi persamaan berikut

$$\begin{aligned}
 (A \otimes B)_{11} &= (a_{11} \otimes b_{11}) \oplus (a_{12} \otimes b_{21}) = (a_{11} \otimes b_{11}) \oplus (a_{21} \otimes b_{12}) = (B \otimes A)_{11} \\
 (A \otimes B)_{12} &= (a_{11} \otimes b_{12}) \oplus (a_{12} \otimes b_{22}) = (a_{12} \otimes b_{11}) \oplus (a_{22} \otimes b_{12}) = (B \otimes A)_{11} \\
 (A \otimes B)_{21} &= (a_{21} \otimes b_{11}) \oplus (a_{22} \otimes b_{21}) = (a_{11} \otimes b_{21}) \oplus (a_{21} \otimes b_{22}) = (B \otimes A)_{21} \\
 (A \otimes B)_{22} &= (a_{21} \otimes b_{12}) \oplus (a_{22} \otimes b_{22}) = (a_{12} \otimes b_{21}) \oplus (a_{22} \otimes b_{22}) = (B \otimes A)_{22}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem persamaan (3) dapat ditulis sebagai system persamaan linear dua sisi berikut

$$C \otimes x = D \otimes x \tag{4}$$

dimana $x = [b_{11} \ b_{12} \ b_{21} \ b_{22}]^T$ dan

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & -\infty & a_{12} & -\infty \\ -\infty & a_{11} & -\infty & a_{12} \\ a_{21} & -\infty & a_{22} & -\infty \\ -\infty & a_{21} & -\infty & a_{22} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & -\infty & -\infty \\ a_{12} & a_{22} & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & a_{11} & a_{21} \\ -\infty & -\infty & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan ini dapat diselesaikan dengan metode alternating [20]. Akan tetapi sistem persamaan linear (2) tidak semuanya mempunyai solusi.

Kesimpulan

Sama seperti pada aljabar klasik, kita juga bisa mencari kelas-kelas matriks komutatif untuk orde 2×2 . Kita peroleh kelas-kelas matriks tersebut diantaranya matriks normal, matriks circulant, matriks power, dan generalisasi matriks Kleene star. Pada [20] kita juga bisa menyelesaikan sistem persamaan linear $C \otimes x = D \otimes x$ untuk mencari matriks yang saling komutatif. Saran penelitian selanjutnya, dari generalisasi matriks komutatif ordo 2×2 maka kita bisa mencari kelas-kelas lainnya pada komutatif ordo 2×2 atas aljabar max-plus.

Referensi

- [1] D. Grigoriev dan V. Shpilrain, "Tropical Cryptography," *Communication in Algebra*, vol. 42, no. 6, pp. 2624-2632, 2014.
- [2] D. Grigoriev dan V. Shpilrain, "Tropical cryptography II: Extensions by homomorphisms," *Communication in Algebra*, vol. 47, no. 10, pp. 4224-4229, 2019.
- [3] A. Muanalifah dan S. Sergeev, "On the tropical discrete logarithm problem and security of a protocol based on tropical semidirect product," *Communication in Algebra*, vol. 50, no. 2, pp. 861-879, 2022.
- [4] S. Kubo dan K. Nishinari, "Applications of max-plus algebra to flow shop scheduling problems," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 247, pp. 278-293, 2018.
- [5] L. Prastiwi dan Y. Listiana, "The Application of Max-Plus Algebra to Determine The Optimal Time of Ikat Kupang Woven Production," *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, vol. 3, no. 2, pp. 77-80, 2017.

- [6] R. Cuninghame-Green dan P. Butkoviic, "Basis in max-algebra," *Linear Algebra and its Application*, vol. 389, pp. 107-120, 2004.
- [7] M. Develin, F.Santos dan B. Strumfels, "On the rank of tropical matrix," *arxiv preprint/0312114*, 2023.
- [8] P. Guillon, Z. Izhakian, M.Mairesse dan G. Merlet, "The ultimate rank of tropical matrices," *Journal of Algebra*, vol. 437, pp. 222-248, 2015.
- [9] Z. Izhakian dan L. Rowen, "The tropical rank of a tropical matrix," *Communications in Algebra*, vol. 37, no. 11, pp. 3912-3927, 2009.
- [10] Z. Izhakian, M. Johnson dan M.Kambites, "Tropical Matrix Groups," *Semigroup forum*, vol. 96, no. 1, pp. 178-196, 2018.
- [11] Z. Izhakian dan S.Margolis, "Semigroup identities in the monoid of two by two tropical matrices," *Semigroup forum*, vol. 80, no. 2, 2010.
- [12] J. Okninski, "Identities of the semigroup of upper triangular tropical matrices," *Communications in Algebra*, vol. 43, no. 10, pp. 4422-4426, 2015.
- [13] J. Linde dan M. de la Puente, "Matrices commuting with a given normal tropical matrix," *Linear Algebra and its Applications*, pp. 101-121, 2015.
- [14] D. Katz, H. Schneider dan S.Sergeev, "On commuting matrices in max-algebra and in classical nonnegative algebra," *Linear Algebra and its Application*, vol. 436, no. 2, pp. 276-292, 2012.
- [15] R.Morrison dan N. Tran, "The tropical commuting variety," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 507, pp. 300-321, 2016.
- [16] Y. Xie, "On 2×2 tropical commuting matrices," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 620, pp. 92-108, 2021.
- [17] A. Muanalifah dan S. Sergey, "Modifying the Tropical Version of Stickel's Key Exchange Protocol," *Applications of Mathematics*, vol. 65, pp. 727-753, 2020.
- [18] P. Butkovic, *Max-Linear Systems: Thoery and Algorithm*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2010.
- [19] D. Jones, "Matrix roots in the max-plus algebra," *Linear Algebra and its Application*, vol. 631, pp. 10-34, 2021.
- [20] R.A.Cuninghame-Green dan P. Butkovic, "The Equation $Ax=By$ over $(\max,+)$," *Theoretical Computer Science*, vol. 293, pp. 3-12, 2003.
- [21] B. Bakhadly, A. Guterman dan M. d. L. Puente, "Normal Tropical $(0,-1)$ -Matrices and Their Orthogonal Sets," *J. Math Sci*, vol. 269, pp. 614-631, 2023.
- [22] M. Johnson dan M.Kambites, "Multiplicative structure of 2×2 tropical matrices," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, no. 7, pp. 1612-1625, 2011.