JURNAL FOURIER | April 2022, Vol. 11, No. 1, 17-21 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2022.111.17-21 E-ISSN 2541-5239

Luas Permukaan Selimut Tabung dan Bola Terpotong

Burhanuddin Latif[1],

[1] *Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta 55281, Indonesia*

Korespondensi; Burhanuddin Latif, Email: burhanuddin.latif@uin-suka.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini ditunjukkan bahwa suatu bola dengan radius a dan suatu tabung dengan radius alas a dan tinggi $2a$, pada saat bola dan tabung tersebut secara bersama - sama dipotong oleh sebuah bidang horizontal $z = h, h \neq 0$ yang paralel dengan $z = 0$, maka luas permukaan bola terpotong dan luas permukaan selimut tabung yang berada pada $z \geq h$ memiliki nilai yang sama. Begitu pula luas permukaan bola terpotong dan luas permukaan selimut tabung yang berada pada $0 \leq z \leq h$ memiliki nilai yang juga sama. Pada saat bola dan tabung tersebut secara bersama - sama dipotong oleh dua buah bidang horizontal $z = h_1$ dan $z = h_2$ dengan h_1 , $h_2 \neq 0$ yang paralel dengan $z = 0$ maka luas permukaan bola terpotong dan luas permukaan selimut tabung yang berada pada $h_1 \leq z \leq h_2$ memiliki nilai yang juga sama. Sehingga bagaimanapun suatu luas permukaan bola dan luas selimut tabung dengan ukuran tersebut bersama - sama dipotong secara horizontal akan memperoleh nilai yang sama yaitu sebesar $2\pi ah$.

Kata Kunci: Bola, Tabung, Bola Terpotong, Selimut Tabung, Luas Permukaan

Abstract

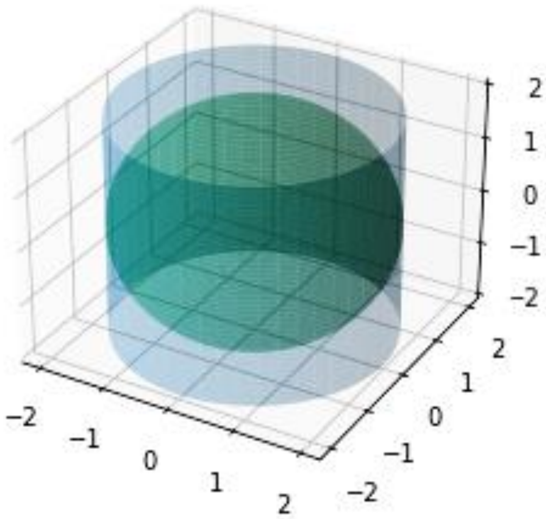
In this article it is shown that a sphere with radius a and a cylinder with a radius a and height $2a$, since the sphere and cylinder were cut together by a horizontal plane $z = h, h \neq 0$ which is parallel to $z = 0$, then the surface area of the hemisphere and the surface area of the circumscribing cylinder at $z \geq h$ have the same value. Likewise, the surface area of the hemisphere and the surface area of the circumscribing cylinder at $0 \leq z \leq h$ have the same value. When the sphere and cylinder are simultaneously cut by two horizontal planes $z = h_1$ and $z = h_2$ with h_1 , $h_2 \neq 0$ which are parallel to $z = 0$, the surface area of the hemisphere and the surface area of the circumscribing cylinder is at $h_1 \leq z \leq h_2$ m have the same value. So that somehow the surface area of the hemisphere and the circumscribing cylinder with those sizes simultaneously are cut horizontally and will get the same value, which is equal to $2\pi ah$.

Keywords: Sphere, Cylinder, Hemisphere, Circumscribing Cylinder, Surface Area

---

Pendahuluan

Sebuah bola dengan radius a dan suatu tabung dengan radius alas a dan tinggi $2a$. Luas permukaan bola tersebut adalah $4\pi a^2$[1][2] seperti menurut Archimedes dalam [3] bahwa luas permukaan sebarang bola adalah empat kali lipat luas lingkaran terbesarnya. Dengan pendekatan luas daerah bidang datar lainnya, diperloeh luas permukaan bola adalah $4\pi a^2$ [4], [5]. Sementara luas permukaan tabung tersebut perbandingannya dnegan luas permukaan bola adalah dua banding tiga [6] sehingga luas permukaan tabung tersebut dengan adalah $6\pi a^2$. Jika tutup dan alas tabung tersebut tidak diikutsertakan, maka akan diperoleh luas permukaan selimut tabung dengan besar $4\pi a^2$ [7]. Sehingga sebuah bola yang jika dimasukkan ke dalam suatu tabung, seluruh sisi tabung bersinggungan dengan bola, maka luas permukaan bola sama dengan luas permukaan selimut tabung. Jika kita potong secara horizontal tepat di tengah tengah bola, akan diperoleh luas permukaan yang sama antara permukaan setengah bola dengan permukaan selimut setengah tabung yaitu sebesar $2\pi a^2$ [8][9][10]. Bagaimana jika kedua bangun ruang tersebut dipotong secara horizontal bukan oleh bidang $z = 0$, melainkan oleh bidang paralel dengan bidang $z = k, k \neq 0$, , baik itu dipotong sekali, maupun dipotong dua kali?



Gambar 1. Bola dan Silinder dengan diameter yang sama

Landasan Teori

Berikut ini beberapa landasan teori yang diperlukan untuk membahas mengenai luas permukaan tabung dan bola yang terpotong.

Definisi 2.1 Menurut Euclid dalam Elements[11], bola atau sphere adalah bangun tertutup, dengan suatu diameter suatu setengah lingkaran tidak bergerak, setengah lingkaran tersebut diputar mengelilingi diameter tersebut hingga kembali ke tempat semula. Titik pusat bola sama dengan titik pusat setengah lingkaran. Diameter bola adalah segmen garis yang melalui titik pusat bola dan dibatasi oleh permukaan bola.

Definisi 2.2 Tabung atau silinder adalah bangun tertutup, dengan suatu paralelogram bersudut siku-siku diputar mengelilingi salah satu sisi paralelogram tersebut hingga Kembali ke tempat semula. Alas dan tutupnya adalah suatu lingkaran.[11]

Teorema 2.1 Jika daerah himpunan $B \subset D$ berada di atas himpunan $C \subset S$ maka

$$A(B) = \int_C \sqrt{1 + |grad\ f(x, y)|^2}\, dA \text{ [12]}$$

Teorema 2.2 Jika permukaan diparametrisasi dalam x dan y sehingga $z = f(x, y)$, maka luas permukaan suatu daerah D adalah

$$A(D) = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \qquad (1)$$

Dengan S adalah proyeksi daerah D terhadap bidang xy. [1][13][14][15]

Hasil dan Pembahasan

Berikut adalah beberapa teorema yang berkaitan dengan luas permukaan selimut tabung dan bola terpotong

Teorema 3.1. Misalkan sebuah bola dengan radius a dan titik pusat di O. Jika bola dipotong dengan dua bidang parallel yang masing masing berjarak c dan b dari bidang xy, maka luas permukaan bola terpotong D adalah

$$2\pi a\left(-\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}\right) \tag{2}$$

Bukti: Misalkan bola $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ dengan merubah bentuk dalam bentuk $z=f(x,y)$ maka, $f(x,y)=z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Sementara $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. Sehingga dengan menggunakan (1)

$$A(D)=\iint_S \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$A(D)=\iint_S \sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$A(D)=\iint_S \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$A(D)=\int_0^{2\pi}\int_b^c \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$A(D)=\int_0^{2\pi} a\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_b^c\,d\theta$$

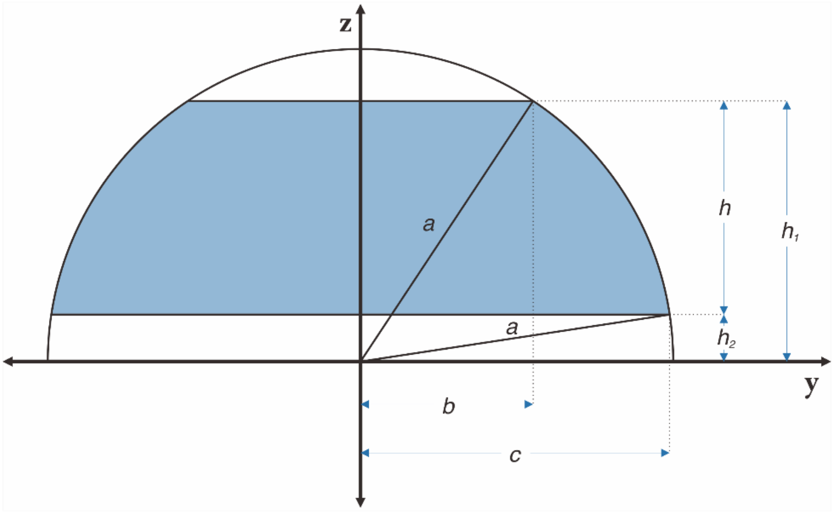
$$A(D)=\int_0^{2\pi} a\left(-\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}\right)d\theta$$

$$A(D)=a\theta\left(-\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$A(D)=2\pi a\left(-\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-b^2}\right).$$

Teorema 3.2. Jika suatu tabung dengan radius a dan tinggi a bersama sama dengan sebuah bola dengan radius a dipotong oleh dua bidang $z=h_1$ dan $z=h_2$ paralel dengan bidang xy, maka luas permukaan bola terpotong D sama dengan luas permukaan selimut tabung terpotong.

Bukti: Perhatikan penampang setengah bola secara horizontal,



Gambar 2. Penampang setengah bola secara horizontal

Karena $a^2 = h_1^2 + b^2$ dan $a^2 = h_2^2 + c^2$ maka

$$A(D) = 2\pi a(-h_2 + h_1) = 2\pi ah \tag{3}$$

Sementara luas permukaan selimut tabung dengan radius alasnya a dan tinggi tabungnya h adalah $2\pi ah$. Sehingga luas permukaan bola terpotong dan luas selimut tabung memiliki besar yang sama.

Akibat 3.1 Jika setengah bola dengan radius a dan tabung dengan radius alasnya a dan tinggi a dipotong oleh sebuah bidang $z = h_1$ yang parallel dengan bidang xy, maka luas permukaan bola terpotong pada $0 \leq z \leq h_1$ sama dengan luas permukaan selimut tabung terpotong.
Bukti: karena setengah bola dipotong oleh suatu bidang $z = h_1$ yang parallel dengan bidang xy maka $c = a$ sehingga $h_2 = 0$ dan $h_1 = h$, akibatnya

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi a\left(-\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - b^2}\right)\\
A &= 2\pi a\left(-\sqrt{a^2 - a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}\right)\\
A &= 2\pi a h_1\\
A &= 2\pi ah
\end{aligned}$$

Akibat 3.2 Jika setengah bola dengan radius a dan tabung dengan radius alasnya a dan tinggi a dipotong oleh sebuah bidang $z = h_2$ yang parallel dengan bidang xy, maka luas permukaan bola terpotong $h_2 \leq z \leq a$ sama dengan luas permukaan selimut tabung terpotong.
Bukti: karena setengah bola dipotong oleh suatu bidang $z = h_2$ yang parallel dengan bidang xy maka $b = 0$ maka $h_1 = a$ sehingga

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi a\left(-\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - b^2}\right)\\
A &= 2\pi a\left(-h_2 + \sqrt{a^2}\right)\\
A &= 2\pi a(-h_2 + a)\\
A &= 2\pi a(-h_2 + h_1)\\
A &= 2\pi ah
\end{aligned}$$

Akibat 3.3 Jika setengah bola dengan radius a dan tabung dengan radius alasnya a dan tinggi a, maka luas permukaan setengah bola yang sama dengan luas permukaan selimut tabung.
Bukti: Jika $b = 0$ dan $c = a$ maka $h_2 = 0, h = h_1 = a$

$$A = 2\pi a\left(-\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$
$$A = 2\pi a\left(-\sqrt{a^2 - a^2} + \sqrt{a^2}\right)$$
$$A = 2\pi a(0 + a)$$
$$A = 2\pi ah.$$

Kesimpulan

Bagaimanapun suatu luas permukaan bola dengan radius a dan luas selimut tabung dengan radius alas a dan tinggi $2a$ bersama - sama dipotong secara horizontal oleh sebuah atau dua buah bidang yang sejajar dengan bidang $z = 0$ akan memperoleh nilai yang sama yaitu sebesar $2\pi ah$, dengan h adalah tinggi bola dan tabung yang terpotong.

Referensi

[1] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 2011.

[2] T. L. Heath, *The Works of Archimedes, Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*. Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

[3] K. Saito and P. D. Napolitani, “Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: The Last Proposition of the Method,” in *From Alexandria, Through Baghdad*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2014, pp. 199–225.

[4] E. Ladyawati, “Mengkonstruksi Luas Selimut Bola,” *Didaktis: Jurnal Pendidikan dan Ilmu Pengetahuan*, vol. 16, no. 3, 2016.

[5] D. Triwahyuningtyas and I. K. Suastika, “Teaching ‘surface area of a sphere and volume of a ball’ using an inquiry approach,” *J Phys Conf Ser*, vol. 1402, no. 7, p. 077103, Dec. 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1402/7/077103.

[6] D. Pengelley, “Sums of numerical powers in discrete mathematics: Archimedes sums squares in the sand.” Mathematical Association of America, 2008.

[7] P. Roy, “Approximate Measurements of The Surface Area of Sphere,” *International Research Journal of Modernization in Engineering Technology and Science*, vol. 3, no. 10, pp. 211–221, Oct. 2021.

[8] T. M. Apostol, *Calculus, Volume II*. New York: John Wiley & Sons, 1969.

[9] P. J. Olver, “Vector Calculus in Three Dimensions.” University of Minnesota, 2013.

[10] A. Bowers, J. Bunn, and M. Kim, “Efficient Methods to Calculate Partial Sphere Surface Areas for a Higher Resolution Finite Volume Method for Diffusion-Reaction Systems in Biological Modeling,” *Mathematical and Computational Applications*, vol. 25, no. 1, p. 2, Dec. 2019, doi: 10.3390/mca25010002.

[11] R. Fitzpatrick, “Euclid’s Elements of Geometry, The Greek text of J.L. Heiberg,” *https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf*, May 22, 2022.

[12] W. Fleming, *Functions of Several Variables*, 2nd ed. Berlin: Springer, 1928.

[13] R. A. Adams, *Calculus, A Complete Course*. Ontario: Pearson Education Canada, 2010.

[14] J. Marsden and A. Weinstein, *Calculus III*. New York: Springer, 1985.

[15] G. J. Tee, *Surface Area of Ellipsoid Segment*. New Zealand: Department of Mathematics, The University of Auckland, 2005.