JURNAL FOURIER | Oktober 2022, Vol. 11, No. 2, 49-58 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2022.112.49-58 E-ISSN 2541-5239

Dimensi Metrik Lokal dari Hasil Perkalian Kuat Graf Bintang

Dea Alvionita Azka[1], Diah Junia Eksi Palupi [2], Al Sutjijana[3]

[1]*Program Studi Rekayasa Hayati , Institut Teknologi Muhammadiyah Sumatera*
[23]*Program Studi Magister Matematika, Fakultas MIPA, Uiniversitas Gadjah Mada, Jl. Yogyakarta 55281, Indonesia*

Korespondensi; Dea Alvionita Azka, Email: dealvionitazka@gmail.com

Abstrak

Diberikan graf terhubung dan sederhana $G=\left(V(G),E(G)\right)$, dengan $u,v\in V(G)$. Jarak antara u dan v, dinotasikan dengan $d(u,v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G. Jika $W\subset V(G)$ dengan $W=\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$ merupakan himpunan k titik yang berada di G dan $v\in V(G)$, maka kode metrik dari v terhadap W adalah $code_W(v)=(d(v,w_1),d(v,w_2),\ldots,d(v,w_k))$. Jika $code_W(v)$ untuk setiap $v\in V(G)$ berbeda, maka W disebut dimensi metrik dan dinotasikan dengan $dim(G)$. Apabila kode metrik untuk setiap dua titik yang bertetangga di $V(G)$ berbeda terhadap W, maka W disebut sebagai himpunan pembeda lokal G. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda lokal G disebut dimensi metrik lokal G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$. Pada penelitian ini diperoleh dimensi metrik lokal dari graf hasil perkalian kuat pada graf bintang.

Kata Kunci: Dimensi metrik lokal, perkalian kuat, graf bintang

Abstract

Let $G=\left(V(G),E(G)\right)$ be a connected simple graph, with $u,v\in V(G)$. The distance between u and v denoted by $d(u,v)$, is defined as the shortest path from u to v at G. A set $W\subseteq V(G)$ with $W=\{w_1,w_2,\ldots,w_k\}$ is set of k distinct vertices in G. The metric code of a vertex v of G with respect to W is k-vector by definition $code_W(v)=(d(v,w_1),d(v,w_2),\ldots,d(v,w_k))$where $d(v,w_i)$ is the shortest distance from v to $w_i, for\ i=1,2,\ldots k$. The set W is a local metric set of G if $code_W(u)\neq code_W(v)$ for every pair u,v of adjacent vertices of G. A local metric set with the minimum cardinality is called local metric basis and its cardinality is called the local metric dimension of G and denoted by $dim_l(G)$. In this paper we study the problem of finding bound for the local metric dimension of strong product of graphs, especially strong product of star graph.

Keywords: Local Metric Dimension, Strong Product, Star Graph

Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang tidak bisa lepas dari kehidupan sehari-hari, karena permasalahan dapat disajikan, dipahami dan dianalisis dalam bentuk yang lebih sederhana. Tahap-tahap yang harus dilalui adalah mencari pokok permasalahan kemudian merumuskan masalah ke dalam model matematika [1]. Graf merupakan salah satu pemodelan matematika. Dalam perkembangannya saat ini, teori graf dapat disajikan sebagai model matematika untuk menganalisis permasalahan yang ada di kehidupan sehari-hari, seperti menentukan lintasan terpendek, masalah komunikasi, transportasi, frekuensi *assignment* dalam telekomunikasi, optimasi penjadwalan dan lain sebagainya [2].

Graf merupakan himpunan titik dan sisi, yang biasanya dinotasikan dengan G. Penelitian dalam graf terus berkembang tidak hanya dari sisi penerapannya tetapi juga dari sisi teorinya. Dengan memperhatikan lintasan terpendek yang menghubungkan antar titik pada graf diperoleh konsep jarak pada graf. Lebih lanjut, salah satu konsep yang menggunakan jarak untuk membedakan setiap titik yang berbeda di suatu graf terhubung adalah himpunan pembeda dan dimensi metrik [3] [4] . Tujuan dari konsep dimensi metrik ini untuk mencari suatu subhimpunan dengan kardinalitas terkecil W dari V(G) yang dapat membedakan setiap titik di graf terhubung G berdasarkan jaraknya ke setiap anggota dari W. Kardinalitas dari W disebut dengan dimensi metrik [5].

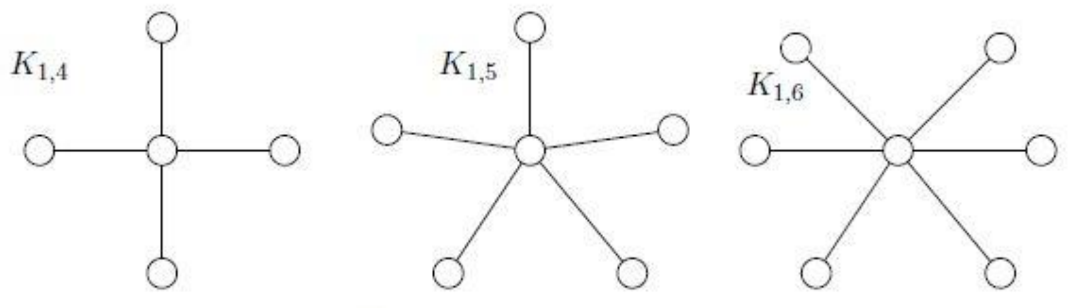
Salah satu aplikasi dari dimensi metrik adalah navigasi robotik, yaitu menghitung banyaknya titik minimal yang dapat menjadi titik acuan sehingga robot dapat mengidentifikasi lokasinya berdasarkan jarak ke setiap titik acuan [6]. Sedangkan konsep himpunan pembeda dapat digunakan dalam klasifikasi senyawa kimia [7]. Setiap senyawa yang berbeda akan memiliki representasi yang berbeda pula. Penerapan lain dari konsep himpunan pembeda dan dimensi metrik adalah network discovery and verification [8].

Ada beberapa ahli yang sudah meneliti mengenai dimensi metrik suatu graf. Chartrand,dkk mengatakan bahwa dimensi metrik suatu graf G adalah satu jika dan hanya jika G merupakan graf lintasan (P_n) dan dimensi metrik suatu graf G adalah $n-1$ jika dan hanya jika G merupakan graf lengkap (K_n) [9]. Lebih lanjut, Okamoto memperkenalkan konsep himpunan pembeda lokal sebagai pengembangan dari himpunan pembeda. Pada konsep ini, suatu subhimpunan W dari V(G) disebut himpunan pembeda lokal jika W dapat membedakan setiap pasangan titik bertetangga di graf terhubung G berdasarkan jaraknya ke setiap anggota dari W. Lebih lanjut, kardinalitas dari himpunan pembeda lokal W yang terkecil disebut dengan dimensi metrik lokal. Terdapat beberapa graf tertentu yang memiliki peran penting dalam teori graf, seperti graf lengkap, graf null, graf bipartit, graf lingkaran, graf path, graf roda dan graf bintang [1]. Ada beberapa penelitian terkait dimensi metrik lokal dari graf khusus [10] [11] [12] [13]. Hanya saja penelitian dimensi metrik lokal masih terbatas dalam bentuk graf khusus. Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah ada, peneliti tertarik untuk mengkaji batas minimal dimensi metrik lokal dari hasil operasi perkalian kuat graf bintang.

Landasan Teori

Graf adalah suatu himpunan tak kosong berhingga dari objek yang disebut titik disertai himpunan sisi (mungkin kosong), yang merupakan pasangan tak terurut dari titik yang berbeda, dan kemudian disajikan dalam bentuk garis [9]. Suatu graf G dapat dituliskan sebagai $(V(G), E(G))$, dengan V(G) adalah himpunan titik dan E(G) adalah himpunan sisi. Misal diberikan $x, y \in V(G), xy \in E(G)$ disebut saling *adjacent* jika terdapat garis yang menghubungkan titik x dan y di G [14].

Terdapat banyak kelas-kelas graf khusus yang berperan penting dalam teori graf, salah satunya adalah graf bintang. Graf bintang yang dinotasikan dengan $K_{1,n-1}$ adalah graf bipartit lengkap dengan n titik. Graf $K_{(1,n-1)}$ mempunyai 1 titik yang berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik yang berderajat 1.
Contoh:



Gambar 1. Graf Bintang $K_{1,4}, K_{1,5}, K_{1,6}$.

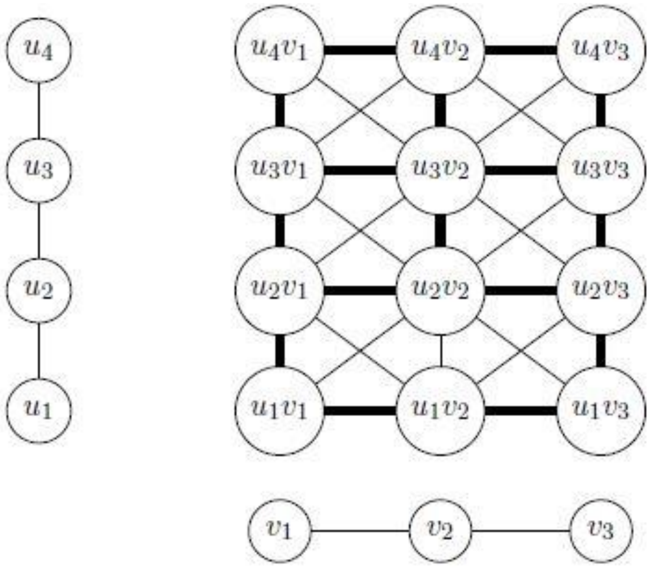
Graf Hasil Perkalian Kuat

Diberikan dua buah graf G dan H. Graf hasil perkalian kuat dari G dan H dinyatakan dengan $G \boxtimes H$ dengan definisi sebagai

$V(G \boxtimes H) = \{(g,h), g \in V(G)$ dan $h \in V(H)\}$

$E(G \boxtimes H) = \{\left((g,h)(g',h')\right) \big| \, g = g'$dan $hh' \in E(H)$ atau $h = h'$dan $gg' \in E(G)$ atau $gg' \in E(G)$ dan $hh' \in E(H)\}$. [14]

Berikut ini adalah contoh perkalian Kuat. Misalkan diberikan graf P_4 dan P_3. Hasil dari $P_4 \boxtimes P_3$ adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Graf $P_4 \boxtimes P_3$

Dimensi Metrik dan Dimensi Metrik Lokal pada Graf

Banyak topik yang berkembang membahas mengenai graf, salah satunya tentang dimensi metrik [15]. Diberikan graf sederhana dan terhubung $G = (V(G), E(G))$, dengan V(G) adalah himpunan semua titik dan E(G) adalah himpunan semua sisi pada G. Selanjutnya, diberikan fungsi $d_G: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ $u$ntuk $\mathbb{N}$ bilangan asli. Fungsi d_G memunculkan definisi jarak antar titik pada suatu graf.

Definisi 1. [9] Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$, dan $u, v \in V(G)$. Jarak dari titik u ke titik v didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v, dan dinotasikan dengan $d_G(u,v)$. Dalam hal tidak ada lintasan yang menghubungkan antara titik u dan v, maka dinotasikan dengan $d(u,v) = \infty$. Selanjutnya, untuk jarak titik u, v di graf G cukup dituliskan dengan $d(u,v)$.

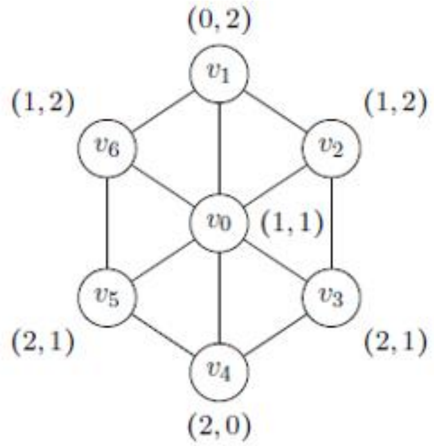
Jika diperumum, jarak pada graf tidak hanya dipandang sebagai jarak antara satu titik ke titik lainnya, tetapi juga jarak antara satu titik ke suatu himpunan titik pada graf tersebut [16].

Definisi 2. [11] Diberikan suatu graf terhubung G,$W \subseteq V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Untuk sebarang v di *V(G)*, hubungan antara v dan W disebut kode metrik, dan dinotasikan dengan $code_W(v)$ yang selanjutnya didefinisikan sebagai $code_W(v) = \left(d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k)\right)$. Selanjutnya Untuk setiap $u, v \in V(G)$ dengan $u \neq v$,W disebut himpunan metrik apabila $code_w(v) \neq code_w(u)$, artinya u dan v dibedakan oleh paling sedikit k elemen di W. Himpunan metrik dengan kardinalitas terkecil disebut dengan basis metrik. Lebih lanjut, kardinaitas terkecil dari himpunan metrik ini disebut dimensi metrik, dan dinotasikan dengan *dim(G)*.

Untuk kejadian khusus, kode metrik dari setiap titik di graf G tidak harus berbeda. Jika hanya diperhatikan kode metrik dari tiitk-titik yang adjacent pada suatu graf, dapat diperoleh definisi sebagai berikut:

Definisi 3. [11] Diberikan graf terhubung G dan $W \subset V(G)$. Himpunan W disebut himpunan metrik lokal apabila $code_W(v) \neq code_W(u)$ untuk setiap titik u dan v yang adjacent di G dengan $u \neq v$. Himpunan metrik lokal dengan kardinalitas terkecil disebut basis metrik lokal. Lebih lanjut, kardinalitas terkecil dari himpunan metrik lokal ini disebut dengan dimensi metrik lokal dari G yang dinotasikan dengan $dim_l(G)$.

Contoh 4. Diberikan graf roda W_6, dengan $V(W_6) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Dipilih S=$\{v_1, v_4\} \subset V(W_6)$, berikut gambar beserta kode metrik setiap titik terhadap himpunan S.



Gambar 3. Graf Roda dengan Dimensi Lokal 2

Berdasarkan kode metrik pada Gambar 3 di atas, S merupakan basis metrik lokal dari graf G, karena untuk setiap titik u, v yang *adjacent* di graf W_6, $code_S(u) \neq code_S(v)$. Jadi $dim_l\,(W_6) = 2$.

Bahan dan Metode

Dimensi metrik lokal adalah kardinalitas terkecil dari himpunan metrik lokal yang tidak saling *adjacent*. Selanjutnya akan diselidiki jarak antara dua buah titik pada suatu graf yang diperoleh dari perkalian kuat dua buah graf. Selanjutnya akan diselidiki jarak antara dua buah titik pada suatu graf yang diperoleh dari perkalian kuat dua buah graf.

Teorema 5. Diberikan graf G dan H. Jika (g, h) dan $(g', h') \in V(\text{G} \boxtimes \text{H})$, maka

$$d_{G\boxtimes H}\,((g,h),(g^{\wedge\prime},h')) = maks\{d_G\,(g,g'), d_H\,(h,h')\}.$$

Bukti. Misalkan $d_G\,(g,g') = \infty$, maka graf G adalah gabungan dari dua saling asing G_1 dan G_2, sedemikian sehingga $g \in V(G_1)$ dan $g' \in V(G_2)$. Akibatnya:

$$\begin{aligned} G \boxtimes H &= (G_1 + G_2) \boxtimes H \\ &= G_1 \boxtimes H + G_2 \boxtimes H \end{aligned}$$

dengan $(g,h) \in V(G_1 \boxtimes H)\ dan\ (g',h') \in V(G_2 \boxtimes H)$, sehingga $d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) = \infty$. Melalui langkah yang sama, untuk $d_H\,(h,h') = \infty$, akan diperoleh $d_{G\boxtimes H}\,((g,h),(g',h')) = \infty$. Jadi, jika $d_G(g,g') = \infty$, atau $d_H(h,h') = \infty$, maka $d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) = \infty$.

Lebih lanjut, diasumsikan $d_G(g,g')$ dan $d_H(h,h') < \infty$, artinya terdapat lintasan yag menghubungkan titik g dan g' di graf G dikatakan $P = a_0, a_1, \dots, a_{d_G(g,g')}$, dengan $g = a_0$ dan $g' = a_{d_G(g,g')}$. Lebih lanjut, terdapat juga lintasan yang menghubungkan titik h dan h' di graf H, katakan $Q = b_0, b_1, \dots, b_{d_H(h,h')}$ dengan $h = b_0$ dan $h' = b_{d_H(h,h')}$. Misalkan $|P| \geq |Q|$ (dapat berlaku sebaliknya), untuk graf $G \boxtimes H$, diperoleh dua buah lintasan yaitu:

$$A = (g,h), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{d_H(h,h')}, h')$$

$$B = (a_{d_H(h,h')}, h'), (a_{d_H(h,h')+1}, h'), (a_{d_H(h,h')+2}, h'), \dots, (g', h').$$

Gabungan dari A dan B adalah panjang lintasan $|P| = maks\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\}$ dari (g,h) ke (g',h'), sehingga diperoleh:

$$d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) \leq maks\{d_G(g,g'), d_H(h,h^{\wedge\prime})\}. \tag{1}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa m$aks\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\} \leq d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h'))$. Dari pembahasan perkalian kuat G dan H selalu dapat diperoleh pemetaan proyeksi ke G atau ke H, maka pemetaan proyeksi P_G yang merupakan homomorfisma lemah, sehingga diperoleh

$$d_G(g,g') = d_G(P_G(g,h), P_G(g',h')) \leq d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')).$$

Hal yang sama juga berlaku untuk $d_H(h,h') \leq d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h'))$, sehingga

$$maks\{d_G(g,g'), d_H(h,h')\} \leq d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')). \tag{2}$$

Akibatnya, dari pertidaksamaan (1) dan (2) diperoleh

$$d_{G\boxtimes H}((g,h),(g',h')) = maks\{d_G(g,g^{\wedge\prime}), d_H(h,h')\}.$$

Selanjutnya dapat ditentukan batasan secara umum dimensi metrik lokal dari graf hasil perkalian kuat.

Teorema 6. [12] Diberikan graf terhubung G dan H dengan $|V(G)| = n_1$ dan $|V(H)| = n_2$. Jika $n_1 \geq 2$ dan $n_2 \geq 2$, maka berlaku

$$3 \leq dim_l(G \boxtimes H) \leq n_1 \cdot dim_l(H) + n_2 \cdot dim_l(G) - dim_l(G) \cdot dim_l(H).$$

Bukti. Diberikan $V(G)$ dan $V(H)$ adalah himpunan titik-titik pada graf G dan H. Klaim bahwa $S = (V(G) \times S_2) \cup (S_1 \times V(H))$ adalah himpunan metrik lokal dari $G \boxtimes H$, dengan S_1 adalah basis metrik lokal dari G dan S_2 basis metrik lokal dari H. Akan ditunjukkan $dim_l(G \boxtimes H) \leq n_1 \cdot dim_l(H) + n_2 \cdot dim_l(G) - dim_l(G) \cdot dim_l(H)$.

Diambil $(u_i, v_j), (u_k, v_l) \in V(G) \times V(H) - S$, dengan $(u_i, v_j), (u_k, v_l) \in E(G \boxtimes H)$. Terdapat tiga kasus dalam hal ini. Jika $u_i = u_k$, maka $v_j\, v_l \in E(H)$, artinya terdapat $b \in S_2$ sedemikian sehingga $d_H(v_j, b) \neq d_H(v_l, b)$. Ekuivalen dengan mengatakan $d_{G\boxtimes H}((u_i,b),(u_i,v_j)) = d_H(b,v_j) \neq d_H(b,v_l) = d_{G\boxtimes H}((u_i,b),(u_k,v_l))$. Jadi, $(u_i,v_j),(u_k,v_l)$ dibedakan oleh $(u_i,b) \in (V(G) \times S_2) \subset S$.

Untuk $v_j = v_l$ dan $u_i\, u_k \in E(G)$, artinya terdapat $c \in S_1$ sedemikian sehingga $d_G(u_i,c) \neq d_G(u_k,c)$. Ekuivalen dengan mengatakan $d_{G\boxtimes H}((u_i,v_j),(c,v_j)) = d_G(c,u_i) \neq d_G(c,u_k) = d_{G\boxtimes H}((c,v_j),(u_k,v_l))$. Sehingga $(u_i,v_j),(u_k,v_l)$ dibedakan oleh $(c,v_j) \in (S_1 \times V(H)) \subset S$.

Untuk $u_i\, u_k \in E(G)$ dan $v_j\, v_l \in E(H)$, diambil sebarang $a \in S_1$ sedemikian sehingga $d_G(a,u_i) \neq d_G(a,u_k)$. Ekuivalen mengatakan $d_{G\boxtimes H}((u_i,v_j),(a,v_j)) = d_G(u_i,a) \neq d_G(u_k,a) = maks\{d_G(u_k,a),1\} = d_{G\boxtimes H}((a,v_j),(u_k,v_l))$. Akibatnya, titik (u_i,v_j) dan (u_k,v_l) dibedakan oleh $(a,v_j) \in (S_1 \times V(H)) \subset S$.

Jadi, berdasarkan kasus 1,2, dan 3, dapat disimpulkan bahwa S adalah himpunan metrik lokal dari G⊠H, dan diperoleh

$$dim_l(G \boxtimes H) \leq n_1 \cdot dim_l(H) + n_2 \cdot dim_l(G) - dim_l(G) \cdot dim_l(H) \tag{3}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan untuk batas bawah dari $dim_l(G \boxtimes H) \geq 3$. Misalkan B adalah basis metrik lokal dari $G \boxtimes H$. Diambil $(u_1, v_1) \in B$, kemudian dipilih $u^* \in N_G(u_1)$ dan $v^* \in N_H(v_1)$. Selanjutnya dihimpun titik-titik persekitaran yaitu $W = \{(u^*, v_1), (u_1, v^*), (u^*, v^*)\}$. Oleh karena (u_1, v_1) tidak bisa dibedakan dengan sebarang pasangan yang adjacent di W, maka terdapat $(u_2, v_2) \in B - (u_1, v_1)$. Lebih lanjut, dipilih

$$q = min\,\{d_{G\boxtimes H}(u_2, v_2), (a, b)\}; (a, b) \in W.$$

Selanjutnya, untuk setiap $(a, b) \in V(W)$, diperoleh $d_{G\boxtimes H}((u_2, v_2), (a, b)) \in \{q, q+1\}$. Berdasarkan prinsip Pigeonhole, maka terdapat dua buah titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$ sedemikian sehingga

$$d_{G\boxtimes H}\,(u_2, v_2)(x_1, y_1) = d_{G\boxtimes H}\,(u_2, v_2)(x_2, y_2).$$

Sehingga $B - \{(u_1, v_1)(u_2, v_2)\} \neq \emptyset$. Akibatnya,

$$dim_l\,(G \boxtimes H) \geq 3. \tag{4}$$

Jadi, berdasarkan (3) dan (4) diperoleh:

$$3 \leq dim_l(G \boxtimes H) \leq n_1 \cdot dim_l\,(H) + n_2 \cdot dim_l(G) - dim_l\,(G) \cdot dim_l(H).$$

Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan teori-teori yang diperoleh di atas, selanjutnya akan diselidiki dimensi metrik lokal dari perkalian kuat graf bintang.

Dimensi Metrik Lokal dari $K_{1,n-1} \boxtimes K_{1,n-1}$

Teorema 7. Diberikan graf $K_{1,n-1}$ dengan $V\big(K_{1,n-1}\big) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan $d(u_i, u_n) = 1$ untuk $i = 1,2, \dots, n-1$, maka diperoleh

$$dim_l\,(K_{1,n-1} \boxtimes K_{1,n-1}) = n.$$

Misalkan $B = \{(u_t, u_1), (u_t, u_2), \dots, (u_t, u_t)\}$, dengan $|B| = t$. Akan dibuktikan bahwa B merupakan himpunan metrik lokal dari graf $K_{1,n-1} \boxtimes K_{1,n-1}$. Kode metrik setiap titik dari graf $K_{1,n-1} \boxtimes K_{1,n-1}$ terhadap himpunan B adalah sebagai berikut:

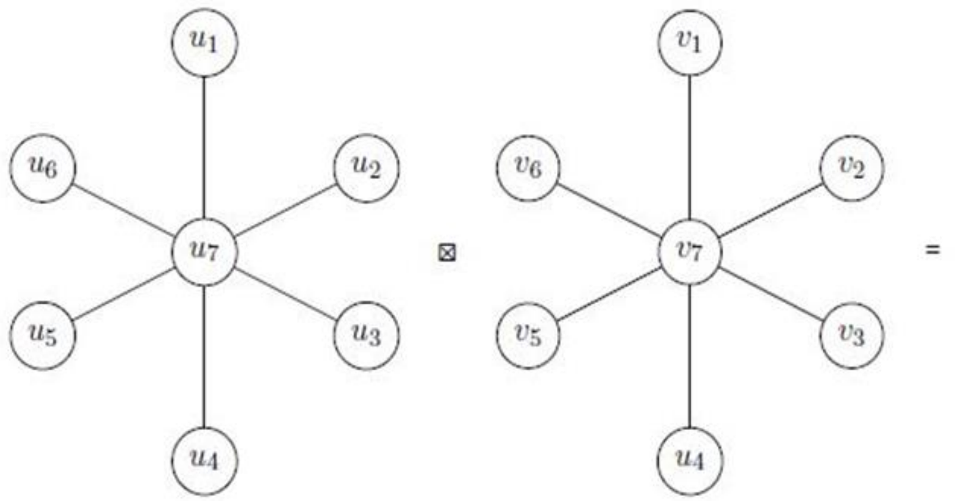
$code_B\,(u_1, u_1) = code_B\,(u_2, u_1) = code_B\,(u_3, u_1) = \cdots = code_B\,(u_{t-1}, u_1) = (1,2, \dots, 2,1).$
$code_B\,(u_1, u_2) = code_B\,(u_2, u_2) = code_B\,(u_3, u_2) = \cdots = code_B\,(u_{t-1}, u_2) = (2,1, \dots, 2,1)$
$code_B\,(u_1, u_3) = code_B\,(u_2, u_3) = code_B(u_3, u_3) = \cdots = code_B\,(u_{t-1}, u_3) = (2,2,1,, \dots, 2,1)$
$\vdots$
$code_B(u_1, u_{n-1}) = code_B(u_2, u_{n-1}) = code_B(u_3, u_{t-1}) = \cdots = code_B(u_{t-1}, u_{t-1}) = (2,2,2, \dots, 1).$
$code_B(u_1, u_t) = code_B(u_2, u_t) = code_B(u_3, u_t) = \cdots = code_B(u_{t-1}, u_t) = (1,1,1, \dots, 1)$
$code_B(u_t, u_1) = (0,2,2, \dots, 1).$
$code_B(u_t, u_2) = (2,0,2, \dots, 1).$
$code_B(u_t, u_3) = (2,2,0, \dots, 1).$
$\vdots$
$code_B(u_t, u_{t-1}) = (2,2, \dots, 0,1).$
$code_B(u_t, u_t) = (1,1,1, \dots, 0).$

Berdasarkan kode metrik di atas, tidak ada titik di $V(K_{1,t-1} \boxtimes K_{1,t-1})$ yang *adjacent* memiliki kode metrik yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa B merupakan himpunan metrik lokal dari $K_{1,t-1} \boxtimes K_{1,t-1}$. Leboh lanjut, akan ditunjukan bahwa B merupakan himpunan metrik lokal dengan kardinalitas minimum. Misalkan terdapat $W = \{(u_t, u_1), (u_t, u_2), \dots, (u_t, u_{t-1})\}$ dengan $|W| = t - 1$. Kode metrik setiap titik di $K_{1,t-1} \boxtimes K_{1,t-1}$ terhadap W adalah sebagai berikut:

$code_W(u_1,u_1) = code_W(u_2,u_1) = code_W(u_3,u_1) = \cdots = code_W(u_{t-1},u_1) = (1,2,2,\dots,2,1).$
$code_W(u_1,u_2) = code_W(u_2,u_2) = code_W(u_3,u_2) = \cdots = code_W(u_{t-1},u_2) = (2,12,,\dots,2,1)$
$code_W(u_1,u_3) = code\_W(u_2,u_3) = code_W(u_3,u_3) = \cdots = code_W(u_{t-1},u_3) = (2,2,1,,\dots,2,1)$
$\vdots$
$code_W(u_1,u_{t-1}) = code_W(u_2,u_{t-1}) = code_W(u_3,u_{t-1}) = \cdots = code_W(u_{t-1},u_{t-1}) = (2,2,2,\dots 1,1).$
$code_W(u_1,u_t) = code_W(u_2,u_t) = code_W(u_3,u_t) = \cdots = code_W(u_{t-1},u_t) = (1,1,1,\dots 1,1)$
$code_W(u_t,u_1) = (0,2,2,\dots,2,1).$
$code_W(u_t,u_2) = (2,0,2,\dots,2,1).$
$code_W(u_t,u_3) = (2,2,0,\dots,2,1).$
$\vdots$
$code_W(u_t,u_{t-1}) = (2,2,2,\dots,0,1).$
$code_W(u_t,u_t) = (1,1,1,\dots,1,1).$

Oleh karena terdapat $(u_1,u_t),(u_t,u_t) \in V(K_{1,t-1} \boxtimes K_{1,t-1})$ yang memiliki kode metrik yang sama yaitu $(1,1,1,\dots,1)$, sedangkan $(u_1,u_t),(u_t,u_t)$ *adjacent*, maka W bukan himpunan metrik lokal dari graf $K_{1,t-1} \boxtimes K_{1,t-1}$. Jadi tidak ada himpunan metrik lokal dengan kardinalitas kurang dari t. Dengan kata lain B merupakan basis metrik lokal, dan $dim_l(K_{1,t-1} \boxtimes K_{1,t-1}) = t$.

Contoh 8. Diberikan graf bintang $K_{1,6}$, dengan $V(K_{1,6}) = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$, dan $d(u_i,u_7) = 1$, untuk $i = 1,2,\dots,6$. Akan diselidiki dimensi metrik lokal dari $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$.

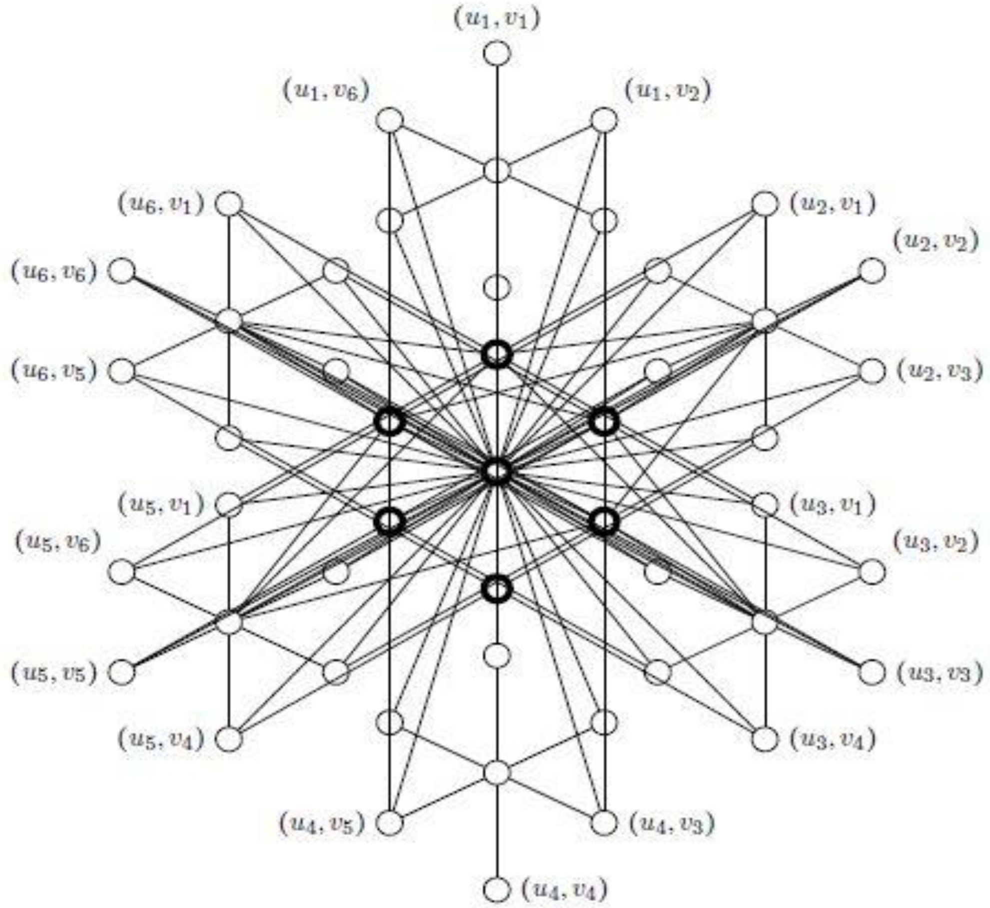


Gambar 4. Graf Roda dengan Dimensi Lokal 2

Misalkan W= $\{(u_7,v_1),(u_7,v_2),(u_7,v_3),(u_7,v_4),(u_7,v_5),(u_7,v_6),(u_7,v_7)\}$ dengan $|W| = 7$ dan $W \subset V(K_{1,6} \boxtimes K_{1,6})$. Akan ditunjukkan bahwa W merupakan basis metrik lokal dari $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$. Kode metrik setiap titik di graf $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$ terhadap W adalah

$code_W(u_1,v_1) = code_W(u_2,v_1) = code_W(u_3,v_1) = code_W(u_4,v_1)$
$= code_W(u_5,v_1) = code_W(u_6,v_1) = (1,2,2,2,2,2,1).$
$code_W(u_1,v_2) = code_W(u_2,v_2) = code_W(u_3,v_2) = code_W(u_4,v_2)$
$= code_W(u_5,v_2) = code_W(u_6,v_2) = (2,1,2,2,2,2,1).$
$code_W(u_1,v_3) = code_W(u_2,v_3) = code_W(u_3,v_3) = code_W(u_4,v_3)$
$= code_W(u_5,v_3) = code_W(u_6,v_3) = (2,2,1,2,2,2,1).$
$code_W(u_1,v_4) = code_W(u_2,v_4) = code_W(u_3,v_4) = code_W(u_4,v_4)$
$= code_W(u_5,v_4) = code_W(u_6,v_4) = (2,2,2,1,2,2,1).$

$code_W(u_1, v_5) = code_W(u_2, v_5) = code_W(u_3, v_5) = code_W(u_4, v_5)$
$= code_W(u_5, v_5) = code_W(u_6, v_5) = (2,2,2,2,1,2,1).$
$code_W(u_1, v_6) = code_W(u_2, v_6) = code_W(u_3, v_6) = code_W(u_4, v_6)$
$= code_W(u_5, v_6) = code_W(u_6, v_6) = (2,2,2,2,2,1,1).$
$code_W(u_1, v_7) = code_W(u_2, v_7) = code_W(u_3, v_7) = code_W(u_4, v_7)$
$= code_W(u_5, v_7) = code_W(u_6, v_7) = (1,1,1,1,1,1).$
$code_W(u_7, v_1) = (0,2,2,2,2,2,1).$
$code_W(u_7, v_2) = (2,0,2,2,2,2,1).$
$code_W(u_7, v_3) = (2,2,0,2,2,2,1).$
$code_W(u_7, v_4) = (2,2,2,0,2,2,1).$
$code_W(u_7, v_5) = (2,2,2,2,0,2,1).$
$code_W(u_7, v_6) = (2,2,2,2,2,0,1).$
$code_W(u_7, v_7) = (1,1,1,1,1,1,0).$



Gambar 5. Graf $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$

Berdasarkan kode metrik di atas, tidak ada titik di $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$ yang adjacent memiliki kode metrik yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa W merupakan himpunan metrik lokal dari $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa W merupakan himpunan metrik lokal dengan kardinalitas minimum. Misalkan terdapat $S = \{(u_7, v_1), (u_7, v_2), (u_7, v_3), (u_7, v_4), (u_7, v_5), (u_7, v_6)\}$ dengan |S|=6. Kode metrik setiap titik di $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$ terhadap himpunan S adalah sebagai berikut:

$code_S(u_1, v_1) = code_S(u_2, v_1) = code_S(u_3, v_1) = code_S(u_4, v_1)$
$= code_S(u_5, v_1) = code_S(u_6, v_1) = (1,2,2,2,2,2).$
$code_S(u_1, v_2) = code_S(u_2, v_2) = code_S(u_3, v_2) = code_S(u_4, v_2)$

$= code_S(u_5, v_2) = code_S(u_6, v_2) = (2,1,2,2,2,2).$
$code_S(u_1, v_3) = code_S(u_2, v_3) = code_S(u_3, v_3) = code_S(u_4, v_3)$
$= code_S(u_5, v_3) = code_S(u_6, v_3) = (2,2,1,2,2,2).000$
$code_S(u_1, v_4) = code_S(u_2, v_4) = code_S(u_3, v_4) = code_S(u_4, v_4)$
$= code_S(u_5, v_4) = code_S(u_6, v_4) = (2,2,2,1,2,2).$
$code_S(u_1, v_5) = code_S(u_2, v_5) = code_S(u_3, v_5) = code_S(u_4, v_5)$
$= code_S(u_5, v_5) = code_S(u_6, v_5) = (2,2,2,2,1,2).$
$code_S(u_1, v_6) = code_S(u_2, v_6) = code_S(u_3, v_6) = code_S(u_4, v_6)$
$= code_S(u_5, v_6) = code_S(u_6, v_6) = (2,2,2,2,2,1).$
$code_S(u_1, v_7) = code_S(u_2, v_7) = code_S(u_3, v_7) = code_S(u_4, v_7)$
$= code_S(u_5, v_7) = code_S(u_6, v_7) = (1,1,1,1,1,1).$
$code_S(u_7, v_1) = (0,2,2,2,2,2).$
$code_S(u_7, v_2) = (2,0,2,2,2,2).$
$code_S(u_7, v_3) = (2,2,0,2,2,2).$
$code_S(u_7, v_4) = (2,2,2,0,2,2).$
$code_S(u_7, v_5) = (2,2,2,2,0,2).$
$code_S(u_7, v_6) = (2,2,2,2,2,0).$
$code_S(u_7, v_7) = (1,1,1,1,1,1).$

Oleh karena terdapat $(u_1, v_7), (u_7, v_7) \in V(K_{1,6} \boxtimes K_{1,6})$ yang memiliki kode metrik yang sama yaitu (1,1,1,1,1,1), sedangkan $(u_1, v_7), (u_7, v_7)$ adjacent, maka S bukan merupakan himpunan metrik lokal dari graf $K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}$. Jadi tidak ada himpunan metrik dengan kardinaltas kurang dari 7. Dengan kata lain W merupakan basis metrik lokal, dan $dim_l\ (K_{1,6} \boxtimes K_{1,6}) = 7$.

Kesimpulan

Dimensi metrik lokal untuk graf bintang $K_{1,n-1}$, dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim_l(K_{1,n-1} \boxtimes K_{1,n-1}) = n$.

Referensi

[1] B. N. Al-Hasanat dan A. S. Al-Hasanat, “Order Graph: A new representation of finite groups,” *International Journal of Mathematics and Computer Science,* pp. 14(4), 809–819., 2019.

[2] Alimuddin, Dasar Sistem Kendali Cerdas: Teori dan Aplikasi, Serang: Untirta Press, 2020.

[3] P. Slater, “Leaves of Trees,” *Congressus Numerantium,* vol. 14, pp. 549-559, 1975.

[4] F. a. M. R. Harary, “On the Metric Dimension of a Graph,” *ars. Combine,* vol. 2, pp. 191-195, 1976.

[5] V. S. P. K. G. Chartrand, “The Independent Resolving Number of A Graph,” *Mathematica Bohemica,* vol. 4, no. 128, pp. 379-393, 2003.

[6] S. R. a. R. Khuller, “Landmarks in Graphs,” *Discrete Appl. Math,* vol. 70, no. 3, pp. 217-229, 1966.

[7] G. C. a. L. E. a. M. A. J. a. O. R. Oellermann, “Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of A Graph,” *Discret.Appl.Math,* vol. 105, pp. 99-113, 2000.

[8] Z. B. F. E. T. W. E. A. H. M. Hoffmann, “Network Discovery and Verification,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communication,* vol. 24, pp. 2168-2181, 2005.

[9] G. E. L. J. a. O. Chartrand, “Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of A Graph,” *Discrete Applied Mathematics,* vol. 105, pp. 99-113, 2000.

[10] S. R. Eka, “Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang dan Graf Bipartit Komplit”.

[11] F. C. P. B. Z. P. d. K. Okamoto, “The Local Metric Dimension of a Graph,” *Mathematica Bohemica,* vol. 135, no. 3, pp. 239-255, 2010.

[12] G. a. R.-V. Barragan-Ramirez, The Local Metric Dimension of Strong Product Graph, Cornell University Library, 2017.

[13] Juo Guo, Kaishun Wang, Fenggao Li, “Metric Dimension of SOme Distance-Regular Graphs,” *Journal of Combinatorial Optimization,* vol. 26, pp. 190-197, 2013.

[14] R. I. a. K. Hammack, Handbook of Product Graphs Second Edition, USA: Taylor and Francis Group, 2010.

[15] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graduate text in mathematics: graph theory, New York: Springer, 2008.

[16] F. Ali, S. Fatima dan W. Wang, “On the power graphs of certain finite groups,” *Linear and Multilinear Algebra,* vol. 21 , no. 2, pp. 50-59, 2020.