

Model Eksponensial dan Logistik Serta Analisis Kestabilan Model Pada Perhitungan Proyeksi Penduduk Provinsi Riau

Nur Khasanah¹, Irma Suryani²

^{1,2}Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jalan HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293

Korespondensi; Irma Suryani, Email: irma.suryani@uin-suska.ac.id

Abstrak

Paper ini membahas tentang proyeksi penduduk menggunakan model eksponensial dan logistik serta selanjutnya menganalisis kestabilan pada model logistik pada data penduduk Provinsi Riau. Pada model eksponensial dan logistik diasumsikan bahwa N_0 adalah populasi awal dan t adalah waktu yang diukur dalam tahun. Analisis kestabilan dilakukan dengan metode linearisasi persamaan disekitar titik tetap, lalu menyelidiki distribusi nilai eigen dari matriks jacobian sistem linier yang didapatkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model eksponensial IV dengan bentuk persamaan $N = 6.344.402e^{(0,02357)t}$ sebagai model terbaik dengan galat sebesar 1,9845, dan model logistik IV dengan bentuk persamaan $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04582)t}+1}$ sebagai model terbaik dengan galat sebesar 1,91629. Analisis kestabilan model logistik mempunyai 2 titik tetap yaitu $N^* = 0$ dan $N^* = K$. Titik tetap $N^* = 0$ merupakan titik kesetimbangan stabil. Sedangkan $N^* = K$ terjadi perubahan kestabilan akibat adanya waktu tunda.

Kata Kunci: Analisis Kestabilan, Model Eksponensial, Model Logistik, Waktu Tunda

Abstract

This paper discusses about population projections using exponential and logistic models as well as to analyze the stability of the logistic model in the population data of Riau Province. In the exponential and logistic models it is assumed that N_0 is the initial population and t is the time measured in years. Stability analysis was carried out by linearizing the equations around a fixed point, then investigating the distribution of the eigenvalues of the jacobian matrix of the linear system obtained. The results showed that the exponential model IV with the equation form $N = 6.344.402e^{(0,02357)t}$ as the best model with error value of 1.9845, and the logistical model IV with the equation form $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04582)t}+1}$ with error value of 1.91629. The stability analysis of the logistic model has two fixed points, $N^ = 0$ and $N^* = K$. The fixed point, $N^* = 0$ is the point of stable equilibrium. While $N^* = K$ there is a change in stability due to the time delay.*

Keywords: Stability Analysis, Exponential Model, Logistic Model, Time Delay

Pendahuluan

Populasi adalah sekumpulan individu dengan spesies yang sama yang hidup pada suatu wilayah tertentu, sehingga populasi manusia juga dapat diartikan seluruh jumlah penduduk di suatu daerah tertentu. Setiap tahunnya pertumbuhan penduduk di Indonesia semakin meningkat. Dengan angka kepadatan dan laju pertumbuhan penduduk yang tinggi, dapat menyebabkan permasalahan dalam berbagai aspek kehidupan, seperti kemacetan, kurangnya ketersediaan lahan, krisis keamanan, kebutuhan pangan, lapangan pekerjaan yang semakin berkurang, angka pengangguran yang tinggi dan lain-lain [1]. Dengan adanya permasalahan ini diperlukan proyeksi kependudukan sebagai sistem pendukung yang membantu

pemerintah dalam pembuatan kebijakan. Hasil dari proyeksi kependudukan bermanfaat untuk perencanaan dalam persediaan pangan, fasilitas Kesehatan, keamanan, fasilitas Pendidikan, pemukiman, lapangan kerja dan rencana pembangunan lainnya. Proyeksi penduduk juga dapat dihitung menggunakan pemodelan matematika menggunakan persamaan diferensial. Sehingga model matematika yang digunakan dalam kasus ini adalah persamaan diferensial model eksponensial dan logistik [2].

Model eksponensial menggambarkan populasi yang terus bertumbuh dan tidak dibatasi oleh lingkungan sehingga tidak terjadi suatu kompetisi untuk mendapatkan sumberdaya. Pada model eksponensial diasumsikan laju pertumbuhan penduduk proporsional dengan jumlah penduduk. Sedangkan pada model logistik memasukkan sejumlah batas agar jumlah populasi tidak berkembang secara tak terhingga [3]. Pada model logistik pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah yang terus bertumbuh tetapi juga sejauh mana batas dari faktor logistik yang tersedia untuk mendukung kehidupan [4].

Namun pada keadaan sebenarnya, sepanjang waktu pertumbuhan daya dukung lingkungan mengalami perubahan, yang mengakibatkan pertumbuhan akan mengalami penundaan. Akibatnya akan terjadi penurunan populasi namun kemudian terjadi peningkatan kembali sehingga membentuk osilasi pada pertumbuhan populasi. Jika persamaan logistik diasumsikan tidak terjadi penundaan waktu pada proses pertumbuhan populasi, maka model akan menghasilkan solusi yang berbentuk fungsi monoton naik atau turun. Sedangkan jika terjadi osilasi, solusi yang dihasilkan bukan fungsi yang monoton [5].

Penelitian mengenai model eksponensial dan logistik dibahas oleh [4] untuk mengetahui proyeksi penduduk di Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan model eksponensial dan logistik berdasarkan tingkat pertumbuhan dan daya dukung. Penelitian ini memilih model terbaik berdasarkan hasil nilai MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) terkecil. Dari penelitian tersebut diperoleh Model Eksponensial V dengan proyeksi penduduk pada tahun 2030 sebesar 43.997.165,5 jiwa dan Model Logistik V dengan proyeksi penduduk pada tahun 2030 sebesar 41.444.035 jiwa dengan laju pertumbuhan penduduk sebesar 0,05111.

Selanjutnya, Peneliti [6] melakukan penelitian mengenai aplikasi persamaan diferensial pada model pertumbuhan penduduk Kota Mataram yaitu Model Eksponensial dan Model Logistik dapat ditentukan besarnya pendugaan jumlah penduduk Kota Mataram pada tahun 2024. Hasil penelitian menunjukkan bahwa model pertumbuhan eksponensial memiliki tingkat keakuratan sebesar 99,6% sedangkan dengan model pertumbuhan logistik menghasilkan tingkat kepercayaannya sebesar 97,9%. Adapun hasil estimasi jumlah penduduk di Kota Mataram pada tahun 2024 adalah sebesar 526.085 jiwa.

Selanjutnya, Peneliti [5] dalam penelitiannya memeriksa kesetimbangan dari model pertumbuhan logistik dilakukan analisis titik-titik kesetimbangan model pertumbuhan populasi dengan penundaan waktu. Hal inilah yang mendasari penulis untuk membahas kembali proyeksi kependudukan menggunakan model eksponensial dan logistik serta menganalisis kestabilan model logistik dengan pengaruh waktu tunda.

Landasan Teori

Berikut akan dibahas model matematika yang akan digunakan dalam penelitian ini.

Model Pertumbuhan Eksponensial

Model pertumbuhan eksponensial dikenal dengan model pertumbuhan populasi penduduk Malthus. Thomas Malthus (1798) membuat sebuah model pertumbuhan penduduk dasar (model pertumbuhan eksponensial) untuk mengestimasi populasi yang laju pertumbuhannya konstan. Model eksponensial

mengatakan bahwa populasi penduduk berkembang tak terbatas sebab faktor lingkungan semisal kompetisi dalam memperoleh makanan [15].

Misal jumlah populasi pada saat t dinyatakan dengan $N(t)$, kemudian jumlah populasi saat $t = 0 = t_0$ adalah N_0 yang laju kelahiran dan kematiannya konstan b dan d serta laju pertumbuhan populasi dinyatakan dengan r , dimana $k = b - d$ maka bentuk model eksponensial dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (1)$$

Solusi model dari Persamaan (1) adalah sebagai berikut:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (2)$$

Dalam hal ini jika r bernilai positif artinya populasi akan meningkat secara eksponensial sedangkan jika r bernilai negatif maka populasi akan semakin punah. Dari Persamaan (2) diperoleh persamaan laju intrinsik (r)

$$r = \frac{\ln \frac{N_t}{N_0}}{t} \quad (3)$$

Model Pertumbuhan Logistik

Model logistik adalah sebuah inovasi dari model sebelumnya yaitu model eksponensial (Malthus). Model logistik melibatkan faktor logistik yaitu faktor ruang hidup dan makanan disebabkan model pertumbuhan alami tidak cukup akurat untuk populasi besar dan tempat yang terbatas yang akhirnya menimbulkan kendala disebabkan populasi yang padat akan menyebabkan populasi di tempat tersebut berkurang. Penggunaan model logistik didasari oleh fakta bahwa besar kecilnya populasi bergantung pada kerapatananya, oleh karenanya laju kelahiran dan laju kematian tidak konstan. Adapun persamaan logistik sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (4)$$

Solusi khusus Persamaan (4) adalah

$$N = \frac{K}{e^{-rt} \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) + 1} \quad (5)$$

dengan :

N = jumlah populasi

N_0 = jumlah populasi awal $t = 0$

K = daya tampung (*carrying capacity*)

r = laju pertumbuhan

t = waktu

Persamaan (5) adalah bentuk sederhana dari solusi khusus model logistik yang selanjutnya akan dipakai dalam melakukan proyeksi penduduk.

Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda

Persamaan logistik dengan waktu tunda dikenal dengan persamaan Hutchinson memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) \quad (6)$$

dimana τ adalah tundaan waktu yang diasumsikan positif. Titik kesetimbangan yang positif untuk Persamaan (6) adalah $N^* = K$.

MAPE

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) adalah kesalahan rata-rata absolut atau rata-rata diferensiasi absolut antara nilai peramalan dan actual yang dinyatakan sebagai persentase nilai aktual. Pada penelitian

ini penggunaan MAPE adalah untuk menilai kecocokan suatu model dalam proyeksi penduduk. Rumus MAPE sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|Y_t - Y'_t|}{Y_t} \times 100\% \quad (7)$$

dengan:

Y_t = Jumlah penduduk sebenarnya

Y'_t = Jumlah penduduk proyeksi

n = Banyaknya data

Interpretasi nilai MAPE yaitu jika $MAPE < 10\%$ maka hasil sangat akurat, $10\% \leq MAPE < 15\%$ sangat baik, $15\% \leq MAPE < 20\%$ baik, dan $20\% \leq MAPE < 50\%$.

Hasil dan Pembahasan

Untuk melakukan proyeksi penduduk di Provinsi Riau perlu dilakukan terlebih dahulu analisis perhitungan terhadap jumlah penduduk agar dapat diketahui pola dan banyaknya data. Adapun data penelitian ini secara ringkas disajikan dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Jumlah Penduduk Provinsi Riau Tahun 2015-2020

Waktu	Tahun	Jumlah Penduduk	Tahun (N)
$t = 0$	2015	6.344.402	N_0
$t = 1$	2016	6.500.971	N_1
$t = 2$	2017	6.657.911	N_2
$t = 3$	2018	6.814.909	N_3
$t = 4$	2019	6.971.745	N_4
$t = 5$	2020	6.394.087	N_5

Sumber : Badan Pusat Statistik Provinsi Riau

Dari Tabel 1 dapat dilihat jumlah penduduk Provinsi Riau tiap tahun dari 2015-2020. Dinamika pertumbuhan penduduk dapat dilihat pada Gambar 1 berikut:



Gambar 1. Grafik Jumlah Penduduk Provinsi Riau Tahun 2015-2020

Berdasarkan Gambar 1 dapat dikatakan bahwa populasi penduduk Provinsi Riau mengalami kenaikan pada tahun 2015-2019 sedangkan pada tahun 2020 jumlah penduduk mengalami penurunan.

Penyelesaian Model Eksponensial

Bentuk umum model eksponensial pada Persamaan (1) dengan solusi pada Persamaan (3) yaitu

$$r = \frac{\ln \frac{N_t}{N_0}}{t}$$

Persamaan $N(t) = N_0 e^{rt}$ pada Persamaan (2) adalah penyelesaian khusus model eksponensial sedangkan laju intrinsik (r) dapat dihitung menggunakan Persamaan (3).

Dari Tabel 1, dilakukan proyeksi penduduk dengan menggunakan model eksponensial, sebelumnya diasumsikan terlebih dahulu bahwa waktu yang diukur dalam tahun dan dimisalkan $t = 0$ pada tahun 2015 maka syarat awal diambil $N(0) = 6.344.402$. Akan ditentukan model eksponensial menggunakan Persamaan (2). Dari persamaan tersebut dapat ditentukan laju instrinsik (r) menggunakan Persamaan (3) jika diketahui $N(0) = 6.344.402$ dan $N(1) = 6.500.971$ nilai r untuk $t = 1$ pada Tahun 2016 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\ln \frac{N_t}{N_0}}{t} \\ r &= \frac{\ln \frac{N(1)}{N(0)}}{1} \\ r &= \frac{\ln \frac{6.500.971}{6.344.402}}{1} \\ r &= \ln(6.500.971) - \ln(6.344.402) \\ r &= 0,024378701 \end{aligned}$$

adapun ketika nilai r disubstitusikan ke persamaan $N(t) = N_0 e^{rt}$ diperoleh bentuk model eksponensial sebagai berikut:

$$N = 6.344.402 e^{(0,02437)t}$$

Untuk $t = 2, t = 3, t = 4, t = 5$ menggunakan perhitungan yang sama.

Dari perhitungan diatas diperoleh hasil model eksponensial sebagai berikut:

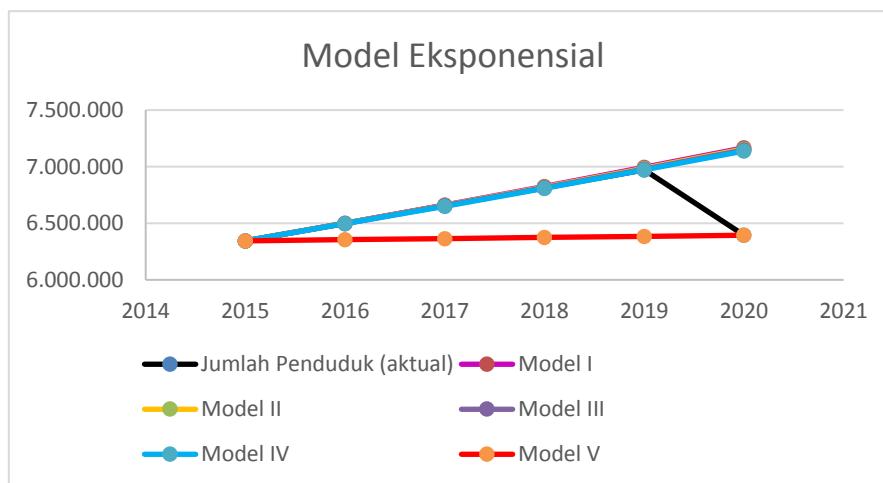
- Model Eksponensial I bentuk persamaannya, $N = 6.344.402 e^{(0,02437)t}$.
- Model Eksponensial II bentuk persamaannya, $N = 6.344.402 e^{(0,02411)t}$
- Model Eksponensial III bentuk persamaannya, $N = 6.344.402 e^{(0,02384)t}$
- Model Eksponensial IV bentuk persamaannya, $N = 6.344.402 e^{(0,02357)t}$
- Model Eksponensial V bentuk persamaannya, $N = 6.344.402 e^{(0,00156)t}$

Setelah diketahui bentuk persamaan untuk setiap model eksponensial dari model I hingga model V, selanjutnya akan dihitung jumlah penduduk Provinsi Riau dari tahun 2015-2020 yang dihasilkan dari kelima model diatas. Berikut disajikan dalam tabel hasil perhitungan jumlah penduduk menggunakan lima model eksponensial. Adapun perbandingannya dapat dilihat pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Perbandingan Data Aktual dan Model Eksponensial

Tahun	Jumlah Penduduk (aktual)	Model I	Model II	Model III	Model IV	Model V
2015	6.344.402	6.344.402	6.344.402	6.344.402	6.344.402	6.344.402
2016	6.500.971	6.500.914	6.499.224	6.497.470	6.495.716	6.354.307
2017	6.657.911	6.661.288	6.657.825	6.654.231	6.650.638	6.364.227
2018	6.814.909	6.825.618	6.820.296	6.814.774	6.809.256	6.374.163
2019	6.971.745	6.994.001	6.986.731	6.979.190	6.971.656	6.384.115
2020	6.394.087	7.166.539	7.157.229	7.147.573	7.137.930	6.394.082

Hasil yang diperoleh kemudian akan dilakukan perbandingan antara jumlah penduduk yang sebenarnya (aktual) dengan hasil model eksponensial. Model yang terbaik adalah model yang menghasilkan data-data cukup dekat dengan data sebenarnya atau jika ditampilkan dalam bentuk grafik maka model terbaik adalah model yang grafiknya mendekati dengan grafik yang dihasilkan dari data sebenarnya. Jika perbandingan jumlah penduduk Provinsi Riau antara data aktual dan hasil model eksponensial ditampilkan dalam diagram garis, maka akan terlihat seperti Gambar 2 berikut:



Gambar 1. Grafik Model Eksponensial Jumlah Penduduk Provinsi Riau

Berdasarkan jumlah penduduk yang dihasilkan oleh kelima model diatas, maka model eksponensial V memberikan hasil yang cukup mendekati data aktual dibandingkan model lainnya.

Diberikan persamaan logistik pada Persamaan (4) sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Persamaan logistik (4) dapat diselesaikan dengan mengintegralkan kedua ruas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ \int \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} &= r dt \end{aligned}$$

$$N = \frac{Ke^{rt+c}}{1 + e^{rt+c}} \quad (8)$$

Persamaan (8) merupakan solusi umum dari Persamaan logistik (4). Dari Persamaan (8) jika diberikan nilai awal $t = 0$ dan $N(0) = N_0$ kemudian disubstitusikan kembali ke Persamaan (8) maka diperoleh $c = \ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)$. Nilai c disubstitusikan ke Persamaan (8) untuk memperoleh solusi khusus model logistik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N &= \frac{Ke^{rt+\ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)}}{1 + e^{rt+\ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)}} \\ N &= \frac{K}{e^{-rt}\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) + 1} \end{aligned} \quad (9)$$

merupakan solusi khusus Persamaan (4) dan Persamaan (9). Persamaan (9) jika dilimitkan $t \rightarrow \infty$ diperoleh (untuk $r > 0$) adalah:

$$N_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} N = K = \frac{a}{b}$$

dengan a dan b secara berturut adalah laju pertumbuhan intrinsik dan pengaruh dari peningkatan kepadatan. Jika N_0 adalah populasi pada saat $t = 0$, N_1 adalah populasi pada saat $t = 0$ dan N_2 pada saat $t = 2$, dari Persamaan (9) didapat:

untuk $t = 1$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\frac{a}{b}}{e^{-r(1)}\left(\frac{a/b}{N_0} - 1\right) + 1} \\ \frac{b}{a}(1 - e^{-r}) &= \frac{1}{N_1} - \frac{e^{-r}}{N_0} \end{aligned} \quad (10)$$

untuk $t = 2$,

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{\frac{a}{b}}{e^{-r(2)}\left(\frac{a/b}{N_0} - 1\right) + 1} \\ \frac{b}{a}(1 - e^{-2r}) &= \frac{1}{N_2} - \frac{e^{-2r}}{N_0} \end{aligned} \quad (11)$$

Dilakukan pembagian pada Persamaan (11) dan (12) untuk mengeliminasi $\frac{b}{a}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}(1 - e^{-r}) &= \frac{1}{N_1} - \frac{e^{-r}}{N_0} \\ \frac{b}{a}(1 - e^{-2r}) &= \frac{1}{N_2} - \frac{e^{-2r}}{N_0} \\ e^{-r} &= \frac{N_0(N_2 - N_1)}{N_2(N_1 - N_0)} \end{aligned} \quad (12)$$

Untuk memperoleh nilai K maka substitusikan Persamaan (12) ke Persamaan (10), sehingga:

$$\frac{b}{a}\left(1 - \frac{N_0(N_2 - N_1)}{N_2(N_1 - N_0)}\right) = \frac{1}{N_1} - \frac{\frac{N_0(N_2 - N_1)}{N_2(N_1 - N_0)}}{N_0}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{N_1(N_1N_0 - 2N_0N_2 + N_1N_2)}{N_1^2 - N_0N_2}$$

sehingga daya tampung (*carrying capacity*) dapat dituliskan:

$$K = \frac{N_1(N_1N_0 - 2N_0N_2 + N_1N_2)}{N_1^2 - N_0N_2} \quad (13)$$

Berdasarkan pada Tabel 1, dilakukan proyeksi penduduk di Provinsi Riau dengan menggunakan model eksponensial dan logistik dengan diasumsikan $t = 0$ pada Tahun 2015 maka syarat awal adalah $N(0) = 6.344.402$. Selanjutnya nilai *carrying capacity* dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (13). Dari Tabel 1 diperoleh $t = 0,1,2$ tahun 2015, 2016, 2017 dengan N_0, N_1, N_2 adalah $N_0 = 6.344.402$, $N_1 = 6.500.971$, $N_2 = 6.657.911$.

Nilai N_0, N_1, N_2 disubstitusikan ke Persamaan (13) diperoleh nilai *carrying capacity* yaitu :

$$K = \frac{6.500.971((6.500.971)(6.344.402) - 2(6.344.402)(6.657.911) + (6.500.971)(6.657.911))}{(6.500.971)^2 - (6.344.402)(6.657.911)}$$

$$K = 13.709.495,15 \quad (14)$$

K dan N_0 didistribusikan ke Persamaan (9) sehingga diperoleh

$$N = \frac{13.709.495,15}{e^{-rt} \left(\frac{13.709.495,15}{6.344.402} - 1 \right) + 1}$$

$$N = \frac{13.709.495,15}{e^{-rt}(1,16088) + 1} \quad (15)$$

Dari Persamaan (15) diatas dicari model logistik yang mewakili laju pertumbuhan untuk $t = 1$ pada tahun 2016 maka $N_1 = 6.500.971$, jika didistribusikan ke Persamaan (15) diperoleh nilai r

$$N_1 = \frac{13.709.495,15}{e^{-rt}(1,16088) + 1}$$

$$r = 0,04586$$

Nilai r disubstitusikan ke (15) maka:

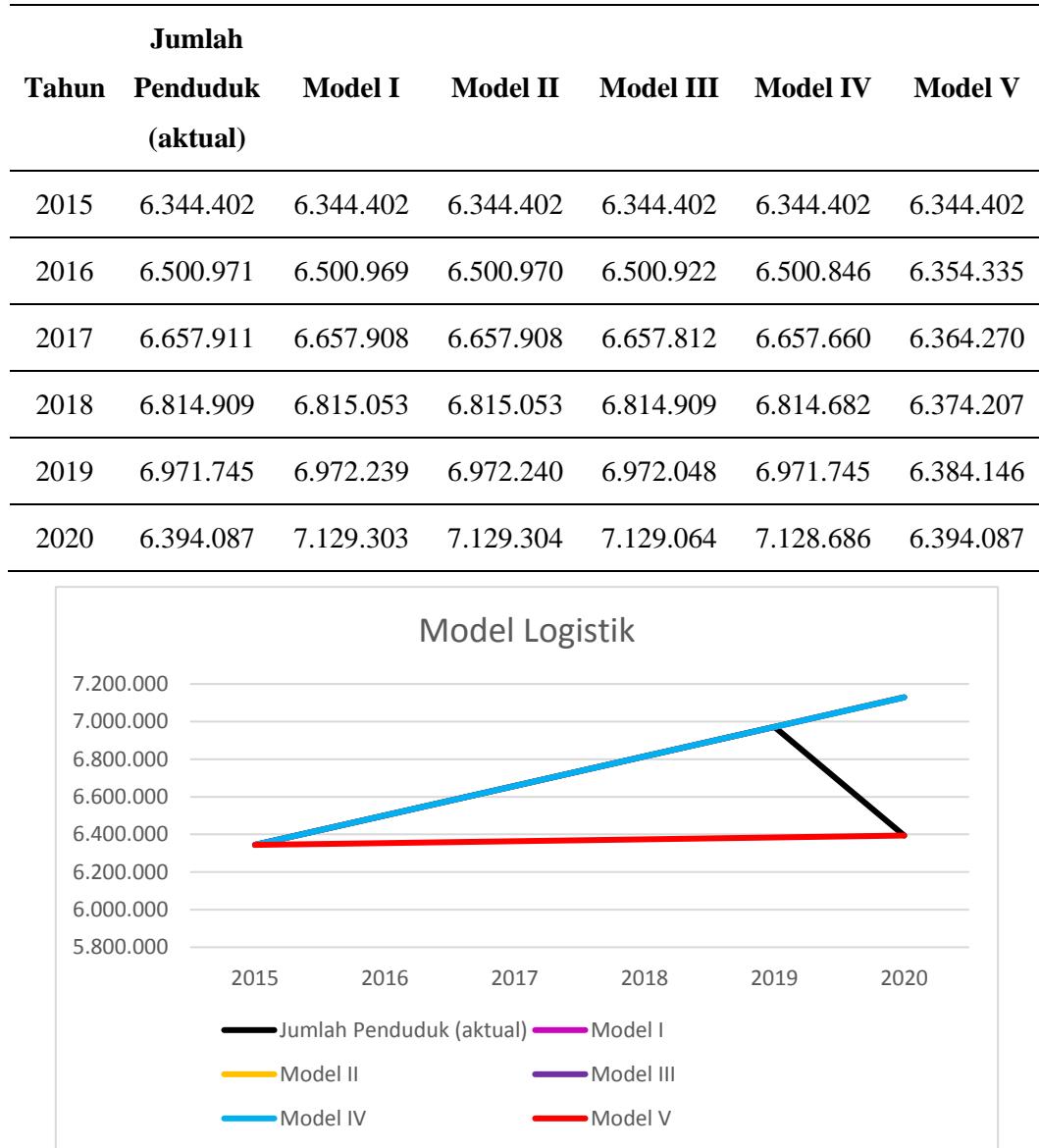
$$N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04586)t} + 1}, (\text{Model logistik I})$$

Maka diperoleh beberapa persamaan logistik sebagai berikut :

- Model Logistik I yaitu $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04586)t} + 1}$
- model Model Logistik II yaitu $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04586)t} + 1}$
- Model Logistik III yaitu $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04585)t} + 1}$
- Model Logistik IV yaitu $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04582)t} + 1}$
- Model Logistik V yaitu $N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,00291)t} + 1}$

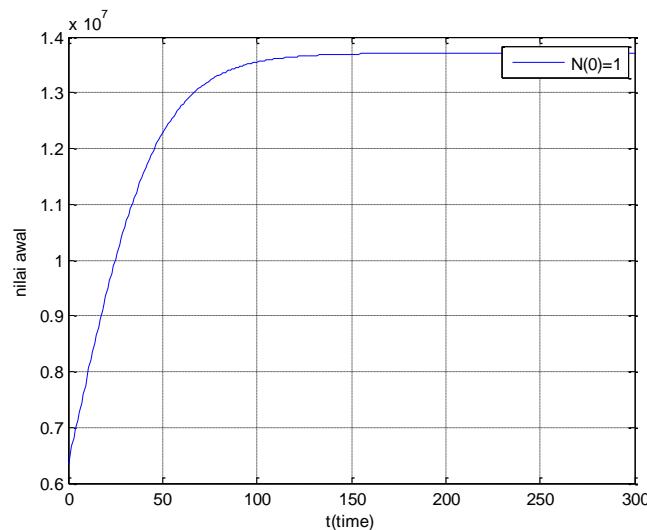
Berdasarkan lima model yang diperoleh beserta data jumlah penduduk pada Tabel 1 dapat dihitung proyeksi penduduk dengan menggunakan model 1,2,..5 yang secara lengkap dapat dilihat pada Tabel 3. Perbandingan jumlah penduduk aktual dengan hasil proyeksi menggunakan logistik sebagai berikut:

Tabel 3. Perbandingan Data Aktual dan Model Logistik



Gambar 2. Grafik Model Logistik Jumlah Penduduk Provinsi Riau

Berdasarkan jumlah penduduk yang dihasilkan oleh kelima model diatas, maka model logistik V memberikan hasil yang cukup mendekati data aktual dibandingkan model lainnya. Berikut akan diberikan proyeksi pertumbuhan penduduk dengan pengambilan waktu $t = 0..300$.



Gambar 3. Grafik Model Logistik dengan $N(0) = 6.344.402$, $K = 13.709.495,15$ dan $r = 0,04586$

Dari grafik pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa untuk jangka waktu yang akan datang penduduk di Provinsi Riau tidak akan melebihi kapasitas daya tampung (*carrying capacity*) tetapi mendekati kapasitas daya tampungnya. Selanjutnya akan dihitung galat nilai dengan menggunakan MAPE. Model yang menghasilkan data-data yang cukup dekat dengan data sebenarnya dapat dikatakan sebagai model terbaik.

Analisis Galat Model

Pada bagian ini dihitung galat jumlah penduduk berdasarkan data pada Tabel 2 dan Tabel 3 menggunakan rumus MAPE. Selanjutnya dipilih model yang memiliki nilai galat terkecil yang kemudian digunakan untuk memproyeksi jumlah penduduk. Perhitungan galat model eksponensial sebagai berikut:

Tabel 4. Galat Model Eksponensial dalam Persen

Tahun	Galat	Galat	Galat	Galat	Galat
	Model I	Model II	Model III	Model IV	Model V
2015	0	0	0	0	0
2016	0,00087	0,026866	0,05386	0,08084	2,25603
2017	0,050721	0,001292	0,05528	0,10923	4,41105
2018	0,157137	0,079045	0,00199	0,08295	6,46737
2019	0,319238	0,21496	0,10679	0,00127	8,42874
2020	12,08073	11,93512	11,7841	11,6333	0,00008
$\sum galat/n$	2,10144	2,04288	2,00033	1,98460	3,59387

Berdasarkan Tabel 4 diketahui bahwa model eksponensial yang memiliki galat terkecil adalah model IV dengan persamaan $N = 6.344.402 e^{(0,02357)t}$. Model ini digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk Provinsi Riau, sehingga jika dimisalkan $t = 15$ pada tahun 2030 menggunakan model tersebut

diperoleh jumlah penduduk Provinsi Riau sebanyak 9.035.153 jiwa. Adapun hasil perhitungan galat model logistik disajikan dalam Tabel 5 berikut:

Tabel 5. Galat Model Logistik dalam Persen

Tahun	Galat	Galat	Galat	Galat	Galat
	Model I	Model II	Model III	Model IV	Model V
2015	0,000027	0,000027	0,000027	0,000027	0,000027
2016	0,000026	0,000026	0,000734	0,001896	2,217374
2017	0,000026	0,000026	0,001463	0,003736	4,335761
2018	0,002209	0,002121	0,000025	0,003309	6,357330
2019	0,007215	0,007216	0,004371	0,000025	8,285676
2020	11,498531	11,498531	11,494665	11,488743	0,194410
$\sum galat/n$	1,918006	1,918006	1,916879	1,916289	3,565096

Dari hasil perhitungan Tabel 5 diketahui bahwa galat model logistik terkecil dihasilkan oleh Model Logistik IV dengan nilai MAPE sebesar 1,91629. Model logistik IV dengan persamaan $P = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04582)t+1}}$ akan digunakan untuk memperkirakan jumlah penduduk di waktu mendatang. Misalkan $t = 15$ pada tahun 2030, maka perkiraan jumlah penduduk Provinsi Riau sebanyak 8.656.294 jiwa.

Analisis Kestabilan

Dari persamaan (6) diperoleh dua titik tetap yaitu $N^* = 0$ dan $N^* = K$. Titik $N^* = 0$ tidak stabil dengan pertumbuhan eksponensial, dengan demikian kita hanya perlu mempertimbangkan kestabilan titik tetap $N^* = K$.

Analisis kestabilan lokal dari titik keseimbangan untuk model logistik dengan waktu tunda dilakukan dengan metode linearisasi di sekitar titik tetap $N^* = K$. Misalkan $u(t) = N(t) - K$ dengan nilai $N(t)$ cukup dekat dengan nilai K . Selanjutnya $N(t) = u(t) + K$ disubstitusikan ke dalam Persamaan (4), diperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t) + K) \left(1 - \frac{u(t-\tau) + K}{K} \right),$$

atau

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{r}{K}u(t)u(t-\tau) - ru(t-\tau).$$

Karena nilai $N(t)$ cukup dekat dengan nilai K , maka bentuk $u(t)u(t-\tau)$ dapat diabaikan. Sehingga model linear yang diperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t-\tau),$$

atau

(16)

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -rN_1(t - \tau).$$

Pertimbangkan persamaan karakteristik untuk Model (5). Dengan mengsubstitusikan fungsi $N_1(t) = ce^{\lambda t}$ ke dalam Model (5) diperoleh persamaan $\lambda e^{\lambda t} = -re^{\lambda(t-\tau)}$. Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, selanjutnya dimana c konstan dan nilai eigen λ adalah solusi dari persamaan karakteristik

$$\lambda + re^{-\lambda\tau} = 0 \quad (17)$$

Dengan λ adalah solusi dari Persamaan karakteristik (6). Menggunakan metode linearisasi, $x = K$ stabil asimtotik jika nilai eigen persamaan (6) merupakan bagian real negatif. Selanjutnya λ dituliskan dalam bentuk bilangan kompleks $\lambda = \mu + iv$, dengan μ dan v masing-masing merupakan bagian riil dan imajiner dari λ . Dengan mengsubstitusikan $\lambda = \mu + iv$ ke Persamaan karakteristik (6) diperoleh:

$$(\mu + re^{-\mu\tau} \cos v\tau) + i(v - re^{-\mu\tau} \sin v\tau) = 0 \quad (18)$$

Jika dipisahkan bagian real dan imajiner dari Persamaan karakteristik (7) diperoleh

$$\mu + re^{-\mu\tau} \cos v\tau = 0 \quad (19)$$

$$v - re^{-\mu\tau} \sin v\tau = 0. \quad (20)$$

Perhatikan bahwa saat $\tau = 0$, Persamaan karakteristik (7) menjadi $\lambda + r = 0$ dan nilai eigen $\lambda = -r < 0$ adalah sebuah bilangan real negatif. Kita mencari kondisi saat τ sedemikian rupa sehingga $Re \lambda$ berganti dari negatif ke positif. Berdasarkan sifat kontinuitas, jika λ berganti dari $-r$ ke suatu nilai sedemikian sehingga $Re \lambda(\tau_0) = \mu(\tau_0) = 0$. Dengan kata lain, Persamaan karakteristik (7) harus memiliki sepasang akar imajiner murni $\pm iv_0$, $v_0 = v(\tau_0)$. Misalkan demikian, maka terdapat

$$\cos v_0\tau = 0$$

yang berarti bahwa

$$v_0\tau_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ingat bahwa $v_0 = r$, didapatkan

$$\tau_k = \frac{\pi}{2r} + \frac{2k\pi}{r}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Sehingga, saat

$$\tau = \tau_0 = \frac{\pi}{2r},$$

Persamaan (7) memiliki sepasang akar imajiner $\pm ir$, yang sederhana dan seluruh akar memiliki bagian negatif. Saat $0 < \tau < \frac{\pi}{2r}$, seluruh akar dari Persamaan (7) memiliki bagian real yang negatif.

Nyatakan $\lambda(\tau) = \mu(\tau) + iv(\tau)$, akar Persamaan (7) memenuhi $\mu(\tau_k) = 0$, $v(\tau_k) = v_0$. Terdapat kondisi transversal

$$\frac{d\mu}{d\tau}|_{\tau=\tau_k} = r^2 > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pembahasan diatas dapat disimpulkan dalam teorema berikut:

Teorema 1. [9]

- Jika $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2r}$ maka titik tetap $N^* = K$ stabil asimtotik.
- Jika $\tau = \tau_0 = \frac{\pi}{2r}$ maka titik tetap $N^* = K$ mengalami perubahan kestabilan, yaitu dari stabil asimtotik jika $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2r}$ menjadi tidak stabil dan muncul solusi periodik jika $\tau > \frac{\pi}{2r}$. Dengan kata lain titik tetap $N^* = K$ mengalami bifurkasi Hopf.

Analisis kesetimbangan di titik $N^* = K$, dapat dilihat beberapa kasus dari τ sebagai berikut

1. Kasus $\tau = 0$

Untuk $\tau = 0$ persamaan karakteristik (6) menjadi

$$\lambda + r = 0$$

Solusi untuk persamaan diatas menjadi $N_1(t) = ce^{-\mu t}$. Pada keadaan ini tidak terjadi osilasi pada $\tau = 0$ karena solusi persamaan adalah eksponensial.

2. Kasus $\tau > 0$

Akan ditentukan kondisi awal dari $\tau > 0$ sehingga $Re \lambda < 0$ agar kesetimbangan di titik $N(t) = K$ stabil. Pada kasus ini dilakukan simulasi untuk $0 < \tau < \frac{\pi}{2r}$. Untuk memperoleh solusi numerik pada persamaan logistik waktu tunda akan dilakukan formulasi diskrit untuk model pertumbuhan logistik diskrit dengan waktu tunda τ sebagai berikut:

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta t N(t) \left(r - \frac{r}{K} N(t - \tau) \right) \quad (21)$$

Dengan pengukuran dilakukan pada setiap selang waktu Δt . Diasumsikan penundaan waktu selama satu tahun ($\tau = \Delta t = 1$). Persamaan (21) disederhanakan menjadi:

$$N(t + \Delta t) = N(t) \left[1 + \left(\Delta t r - \Delta t \frac{r}{K} N(t - \Delta t) \right) \right] \quad (22)$$

Persamaan (22) disederhanakan lagi menghasilkan:

$$N_{m+1} = N_m (1 + \alpha - \beta N_{m-1}) \quad (23)$$

Dengan $\alpha = \Delta t r$ dan $\beta = \Delta t \frac{r}{K}$. Sehingga kesetimbangan yang diperoleh adalah $N^* = 0$, atau $N^* = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Delta t r}{\Delta t \frac{r}{K}} = K$. Sehingga dapat disimpulkan pada saat $\tau < \frac{\pi}{2r}$ populasi menjadi stabil.

3. Kasus $\tau < \frac{\pi}{2r}$

Misalkan $\tau = \tau_c + \varepsilon$ maka

$$\tau = \frac{\pi}{2r} + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

Untuk $\tau = \frac{\pi}{2r}$, diketahui bahwa nilai $\mu = 0$ dan $\nu = r$. Untuk ε yang sangat kecil, μ dan ν berubah menjadi $\mu = \delta$ dan $\nu = r + \sigma$, $0 < \delta \leq 1$, $0 < \sigma \leq 1$

Dengan δ dan σ akan ditentukan dengan mensubstitusikan $0 < \delta \leq 1$ dan $0 < \sigma \leq 1$ ke Persamaan (8) dan (9) didapat

$$\delta = -re^{\left(-\delta\left(\frac{\pi}{2r}+\varepsilon\right)\right)} \cos\left((r + \sigma)\left(\frac{\pi}{2r} + \varepsilon\right)\right) \quad (24)$$

$$r + \sigma = re^{\left(-\delta\left(\frac{\pi}{2r}+\varepsilon\right)\right)} \sin\left((r + \sigma)\left(\frac{\pi}{2r} + \varepsilon\right)\right) \quad (25)$$

Dari nilai δ dan σ yang didapat maka solusi untuk Persamaan (5) ditulis sebagai berikut $N_1(t) = Re(ce^{(\mu+iv)t})$. Dengan menggantikan nilai μ dan ν yang baru maka

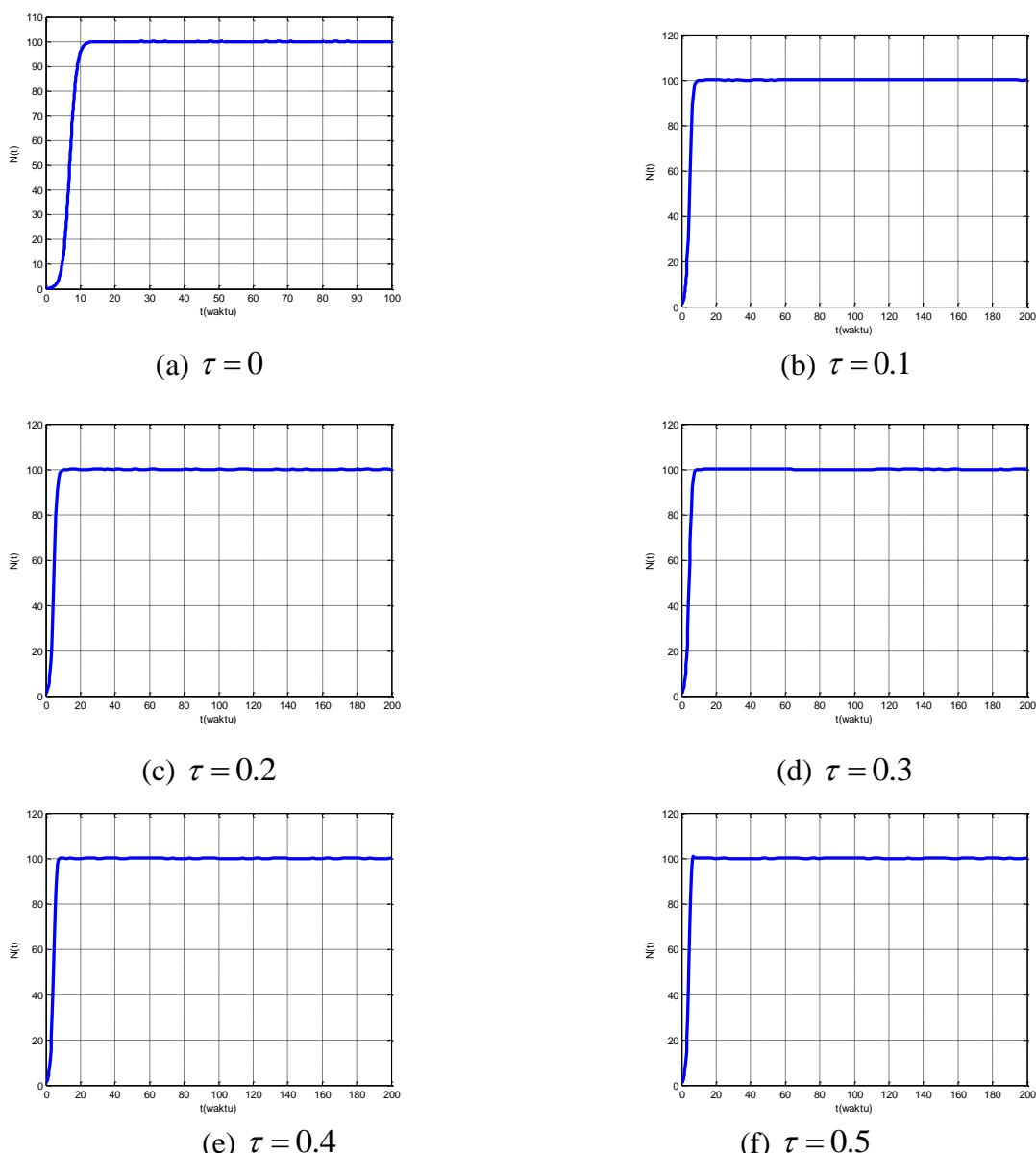
$$N_1(t) = c \left(e^{\left(\frac{r^2\delta t}{1+\frac{\pi^2}{4}}\right)} \right) \left(\cos t \left(r - \frac{r^2\varepsilon\pi}{2\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)} \right) \right).$$

untuk $\varepsilon > 0$, jika semakin besar nilai ε yang digunakan maka parameter waktu tunda jumlah semakin besar. Untuk τ yang semakin besar ($\tau > \frac{\pi}{2r}$) solusi berosilasi semakin besar menjauhi titik kesetimbangan.

4. **Kasus $\tau = \frac{\pi}{2r}$** (terjadi penundaan yang mengakibatkan suatu keadaan setimbang stabil berubah menjadi suatu keadaan setimbang yang tidak stabil). Dalam hal ini jika waktu tunda meningkat melebihi nilai $\tau = \frac{\pi}{2r}$, maka keadaan setimbang menjadi tidak stabil.

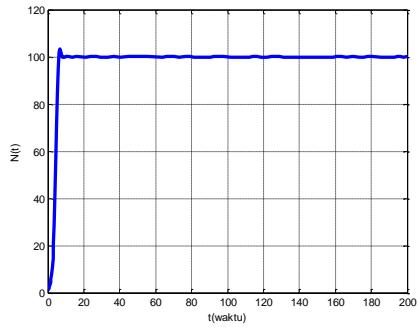
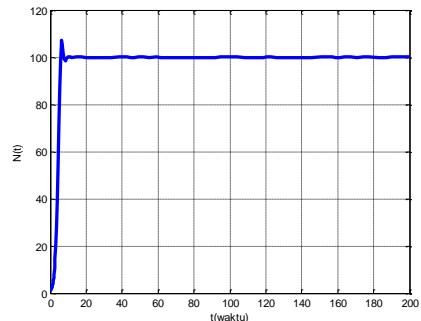
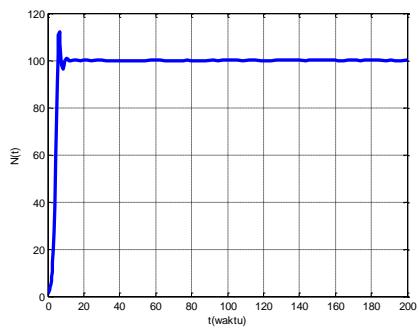
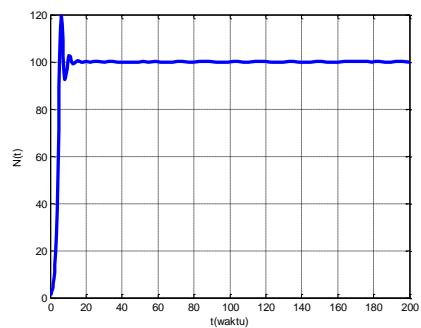
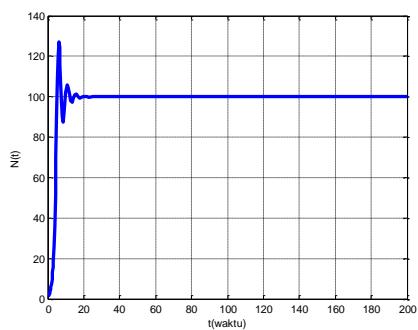
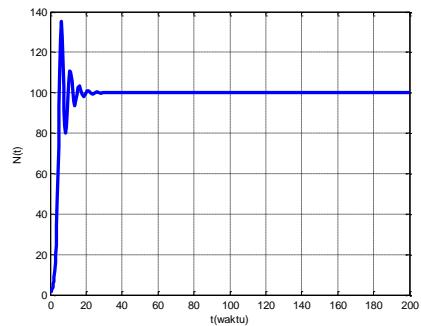
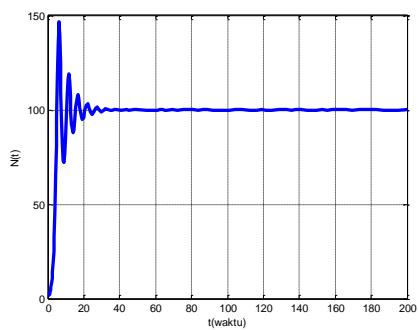
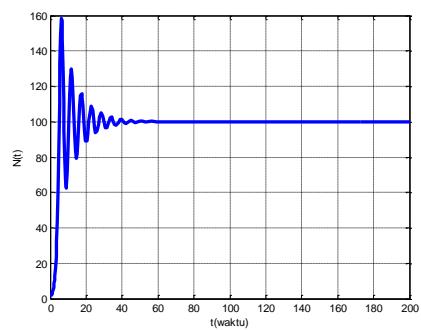
Simulasi Numerik

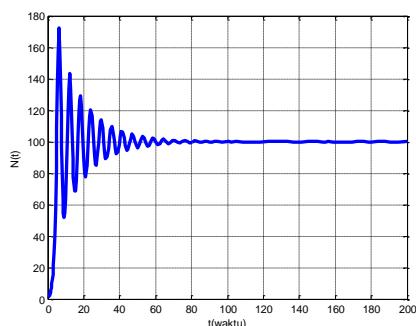
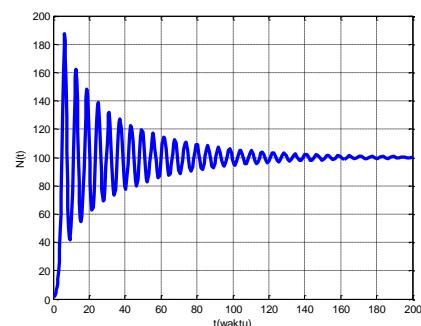
Pada bagian ini akan ditunjukkan simulasi numerik untuk model persamaan logistik tanpa waktu tunda dan persamaan logistik dengan waktu tunda. Akan dilihat perilaku dari model pada Persamaan (4) untuk mengetahui kestabilan titik tetap $N^* = K$ sampai pada nilai τ maksimal. Diberikan parameter waktu tunda $\tau = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.9, 2$ dan 3, dengan dimisalkan $r = 1$ dan $K = 100$. Dengan menggunakan *software MATLAB*, diperoleh grafik model logistik dengan dan tanpa waktu tunda sebagai berikut yang disebut Gambar 6.



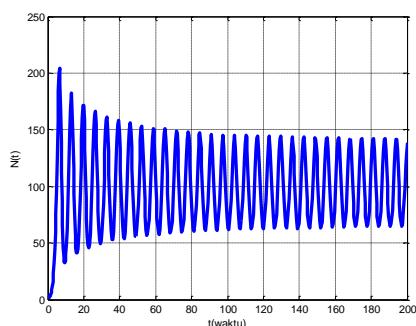
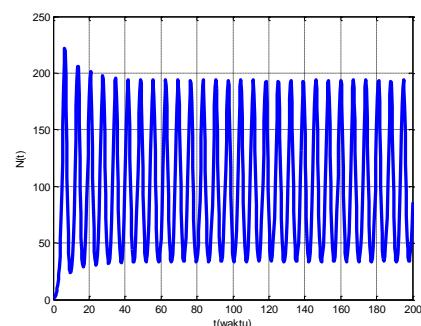
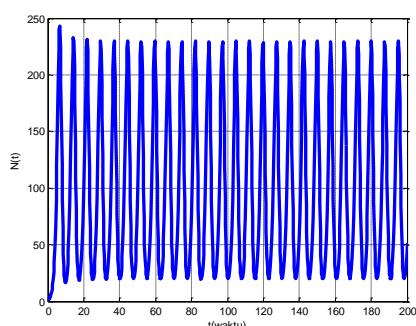
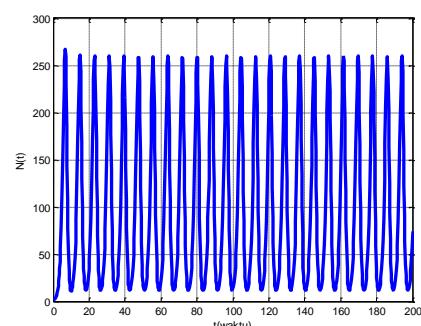
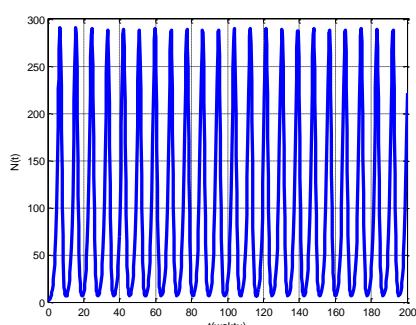
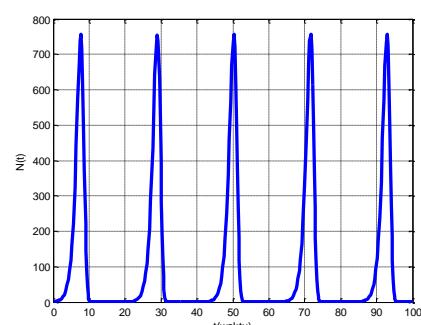
Pada Gambar 6, gambar bagian (a) merupakan pola pertumbuhan logistik tanpa waktu tunda, kondisi ini menunjukkan pola pertumbuhan populasi mendekati *carrying capacity* sehingga dapat dikatakan

stabil. Pada bagian (b), (c), (d), (e) dan (f) dengan nilai parameter $\tau = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ menunjukkan pada bagian ini pertumbuhan mencapai kenaikan disekitar titik tetap $N(t) = 100$ dan akhirnya mencapai kestabilan.

(g) $\tau = 0.6$ (h) $\tau = 0.7$ (i) $\tau = 0.8$ (j) $\tau = 0.9$ (k) $\tau = 1$ (l) $\tau = 1.1$ (m) $\tau = 1.2$ (n) $\tau = 1.3$

(o) $\tau = 1.4$ (p) $\tau = 1.5$

Sedangkan pada bagian (g), (h), (i), (j), (k), (l), (m), (n) dan (o) dengan nilai parameter $\tau = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ mengalami kenaikan kemudian mengalami penurunan, selanjutnya mengalami osilasi kemudian mencapai titik kestabilan disekitar titik tetap yaitu pada $N(t) = 100$. Selanjutnya pada bagian (p) dengan nilai parameter $\tau = 1.5$ merupakan nilai bifurkasi dimana suatu keadaan setimbang stabil berubah menjadi suatu keadaan setimbang yang tidak stabil.

(q) $\tau = 1.6$ (r) $\tau = 1.7$ (s) $\tau = 1.8$ (t) $\tau = 1.9$ (u) $\tau = 2$ (v) $\tau = 3$

Gambar 6. Simulasi Model Logistik Dengan dan Tanpa Waktu Tunda

Pada bagian (q), (r), (s), (t), (u), dan (v) dengan $\tau = 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2$, dan 3 solusi berosilasi semakin besar dan menuju titik kesetimbangan. Sehingga kesetimbangan menjadi tidak stabil dan muncul solusi periodik. Dengan kata lain secara berkala populasi penduduk bertambah dan tidak benar-benar punah di suatu tempat tersebut.

Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dari penelitian ini dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil perhitungan proyeksi penduduk menggunakan model eksponensial dan model logistik menghasilkan 5 model sesuai dengan laju intrinsik (r) yang berbeda-beda untuk setiap modelnya. Setelah dilakukan analisis galat model, disimpulkan bahwa Model Eksponensial IV dengan bentuk persamaan $N = 6.344.402 e^{(0,02357)t}$ sebagai model terbaik dengan galat atau nilai MAPE terkecil yaitu sebesar $1,9845$, dan Model Logistik IV dengan bentuk persamaan

$$N = \frac{13.709.495,15}{(1,16088)e^{-(0,04582)t} + 1}$$

sebagai model terbaik dengan galat sebesar $1,91629$. Dari kedua model eksponensial dan logistik yang terbaik, diperoleh proyeksi penduduk Provinsi Riau pada tahun 2030 adalah sebesar $9.035.153$ jiwa menggunakan Model Eksponensial IV, sedangkan dengan model logistik IV sebesar $8.656.294$ jiwa. Hampir semua hasil perhitungan estimasi penduduk provinsi Riau menggunakan model logistik mendekati data yang sebenarnya. Sehingga dapat disimpulkan model logistik adalah model yang lebih tepat digunakan untuk memproyeksi jumlah penduduk provinsi Riau.

2. Analisis kestabilan model logistik mempunyai 2 titik tetap yaitu $N^* = 0$ dan $N^* = K$. Titik tetap $N^* = 0$ merupakan titik kesetimbangan stabil. Sedangkan $N^* = K$ bersifat stabil asimptotik. Titik tetap $N^* = K$ dibahas untuk kasus adanya keterlambatan atau penundaan. Disimpulkan bahwa untuk jumlah populasi yang sama dengan *carrying capacity* ($N^* = K$) keadaan setimbangnya stabil untuk $\tau < \frac{\pi}{2r}$, tidak stabil untuk $\tau > \frac{\pi}{2r}$, sedangkan untuk $\tau = \frac{\pi}{2r}$ terjadi bifurkasi. Secara umum semakin besar waktu tunda dalam pertumbuhan populasi menyebabkan ketidakstabilan pada pertumbuhan, dalam hal ini terjadi ledakan populasi dan juga populasi dapat berkurang hingga akhirnya mengalami kepunahan.
3. Simulasi numerik menunjukkan kesimpulan yang sama dengan hasil analisis.

Referensi

- [1] C. Christiani, P. Tedjo, dan B. Martono, "Analisis Dampak Kepadatan Penduduk Terhadap Kualitas Hidup Masyarakat Provinsi Jawa Tengah," *Jurnal Ilmiah UNTAG Semarang*, vol. 3, no. 1, hal. 102–114, 2014.
- [2] Y. K. Pandu, "Prediksi Penduduk Kabupaten Alor Dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik Pada Beberapa Tahun Mendatang," *Asimtot : Jurnal Kependidikan Matematika*, vol. 2, no. 1, hal. 71–81, 2020.
- [3] A. Kurniawan, I. Holisin, dan F. Kristanti, "Aplikasi Persamaan Diferensial Biasa Model Eksponensial dan Logistik pada Pertumbuhan Penduduk Kota Surabaya," *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, vol. 2, no. 1, hal. 129, 2017.
- [4] D. Anggreini, "Penerapan Model Populasi Kontinu Pada Perhitungan Proyeksi Penduduk Di Indonesia (Studi Kasus: Provinsi Jawa Timur)," *E-Jurnal Matematika*, vol. 9, no. 4, hal. 229, 2020.
- [5] H. M. Timuneno, R. H. Soelistyo Utomo, dan Widowati., "Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda," *Jurnal Matematika*, vol. 11, no. 1, hal. 43–51, 2008.
- [6] N. Rozikin, K. Sarjana, A. Arjudin, dan N. Hikmah, "Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Mengestimasi Jumlah Penduduk dengan Menggunakan Model Eksponensial dan Logistik," *Griya Journal of Mathematics Education and Application*, vol. 1, no. 1, hal. 44–55, 2021.

- [7] G. Marion, *An Introduction to Mathematical Modeling*, 3 ed. 2008.
- [8] Widowati dan Sutimin, *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro, 2007.
- [9] N. Finizio dan G. Ladas, *Introduction to Differential Equations*. University of Rhode Island, 1982.
- [10] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations*, 10th Ed., 10 ed. Richard Stratton, 2013.
- [11] D. H. Trahan, W. E. Boyce, dan R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.*, 11 ed., vol. 86, no. 7. John Wiley & Sons, 2017.
- [12] Stephen Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer, 2000.
- [13] B. Maxfield, *Calculus and Differential Equations*, 2 ed. CRC Press, 2000.
- [14] L. Perko, "Differential Equations and Dynamical Systems," *Department of Mathematics Northem Arizona University Flagstaf*. USA, 1983.
- [15] N. S. Nurkholipah, N. Anggriani, dan A. K. Supriatna, "Perbandingan Proyeksi Penduduk Jawa Barat Menggunakan Malthus dan Verhust dengan Variasi Internal Pengambilan Sampel," *Jurnal DIALEKTIKA*, vol. 1, no. 1, hal. 195-202., 2017.
- [16] S. Toaha, "Analisis Kestabilan Model Logistik Satu Populasi Dengan Tundaan Waktu," *Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi*, vol. 8, no. 2, hal. 131–138, 2012.