

Trace Matriks Toeplitz Heptadiagonal Simetris Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Fitri Aryani^{1*}, Eza Syafri Ramadhani², Yuslenita Muda³, Corry Corazon Marzuki⁴

¹²³⁴Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jalan HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293.

Korespondensi; Fitri Aryani, Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua sampai empat. Untuk mendapatkan bentuk umum trace matriks tersebut dimulai dengan menentukan bentuk umum perpangkatan matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua. Sedangkan perpangkatan tiga dan empat cukup dengan menentukan entri-entri diagonal utama saja dari perpangkatan matriks Toeplitz heptadiagonal simetris tersebut. Selanjutnya, diperoleh bentuk umum trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua sampai empat. Kedua bentuk umum tersebut dibuktikan dengan cara pembuktian langsung.

Kata Kunci: Matriks Toeplitz, Pembuktian Langsung, Trace Matriks

Abstract

This paper aims to obtain the general form of the trace of integer positif two until four power of heptadiagonal symmetric Toeplitz matrix. To obtain the general form, first prove the integer positif two power of heptadiagonal symmetric Toeplitz matrix and prove the main diagonal entries of the integer positif three and four power of heptadiagonal symmetric Toeplitz matrix. Furthermore, to obtain the general forms trace of integer positif two until four power of heptadiagonal symmetric Toeplitz matrix. The two general forms are proven by means of direct proof.

Keywords: Toeplitz Matrix, Direct Proof, Trace Matrix

Pendahuluan

Dalam teori matriks terdapat beberapa jenis matriks yang salah satu diantaranya adalah matriks Toeplitz. Menurut [1], matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $T_n = [t_{kj}; k, j = 0, 1, 2, \dots, n-1]$ dengan $t_{kj} = t_{k-j}$. Pada penelitian ini yang dibahas pada matriks adalah menghitung trace matriks berpangkat. Trace matriks adalah jumlah dari entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujursangkar. Penghitungan trace pada matriks berpangkat perlu dilakukan perpangkatan matriks yang melibatkan proses perkalian matriks. Setelah didapatkan bentuk perpangkatan matriks, selanjutnya akan diperoleh trace dari matriks berpangkat tersebut.

Trace dari suatu matriks berpangkat dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti analisis jaringan, teori bilangan, sistem dinamik dan persamaan diferensial [2]. Lebih lanjut, pembahasan mengenai trace matriks berpangkat telah di bahas oleh [3] pada tahun 2015. Penelitian tersebut membahas mengenai bentuk umum trace matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$tr A^n = \begin{cases} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(-1)^r}{r!} n [n - (r + 1)][n - (r + 2)] \dots [\text{up to } r \text{ terms}] (\det A)^r (tr A)^{n-r}, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(-1)^r}{r!} n [n - (r + 1)][n - (r + 2)] \dots [\text{up to } r \text{ terms}] (\det A)^r (tr A)^{n-r}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Pembahasan mengenai trace matriks berpangkat juga telah dibahas oleh [4] pada tahun 2018. Penelitian tersebut membahas tentang trace matriks Toeplitz kompleks bentuk khusus berukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut yaitu:

$$tr(A)^n = \begin{cases} 0, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ (-2)^{\frac{n}{2}+1} \cdot (a + bi)^n, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Selanjutnya, di tahun 2019 [5] melakukan penelitian mengenai trace matriks berpangkat, dan matriks yang digunakan adalah matriks Toeplitz tridiagonal berukuran 3×3 . Bentuk matriksnya berbeda dengan bentuk matriks pada [4], dengan perpangkatannya berpangkat bilangan bulat positif. Berdasarkan penelitian tersebut diperoleh bentuk umum trace matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif untuk n genap dan n ganjil, yaitu:

$$tr(A)^n = \begin{cases} 3a^n + 4 \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2} b^r c^r, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3a^n + 4 \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2} b^r c^r, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Ditahun yang sama (2019) [6] juga membahas mengenai trace matriks Toeplitz berpangkat, tetapi jenis matriks Toeplitznya adalah matriks Toeplitz simetris bentuk khusus dengan ukuran 3×3 , dan berpangkat bilangan bulat positif. Hasil penelitian tersebut diperoleh trace matriks Toeplitz simetris bentuk khusus ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. untuk n genap dan n ganjil, yaitu:

$$tr(A)^n = \begin{cases} 0, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ (-2)^{\frac{n}{2}+1} \cdot (a)^n, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Penelitian yang sama mengenai trace matriks Toeplitz berpangkat juga dilakukan oleh [7]. Namun jenis matriksnya berbeda dengan [4],[5], dan [6]. Matriks yang digunakan adalah matriks Toeplitz-Hessenberg yang berukuran $n \times n$ dengan pangkat bilangan bulat positif empat. Dari matriks tersebut diperoleh bentuk umum dari trace matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif empat yaitu:

$$tr(H_n^4) = n h_1^4 + (12n - 12) h_0 h_1^2 h_2 + (6n - 10) h_0^2 h_2^2 + (12n - 24) h_0^2 h_1 h_3 + (4n - 12) h_0^3 h_4$$

Selanjutnya, penelitian [8] pada tahun 2020 membahas mengenai trace matriks Toeplitz pentadiagonal simetris berpangkat dua. Dari matriks tersebut diperoleh bentuk umum dari trace matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat yaitu:

$$tr(P_m)^2 = m a^2 + 2(m - 1)b^2 + 2(m - 2)c^2$$

Berdasarkan uraian hasil penelitian-penelitian sebelumnya mengenai trace matriks Toeplitz berpangkat, penulis tertarik untuk menyelesaikan bentuk umum dari trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua sampai empat. Pada penelitian ini matriksnya juga berbeda dari matriks-matriks yang dipakai oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Bentuk umum matriks yang digunakan ada pada [9].

Landasan Teori

Definisi 1 [1]. Matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $T_n = [t_{kj}; k, j = 0, 1, 2, \dots, n-1]$ dengan $t_{kj} = t_{k-j}$. Bentuk umum dari matriks Toeplitz sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \dots & t_0 \end{bmatrix}$$

Matriks Toeplitz terdiri dari beberapa tipe diantaranya matriks Toeplitz tridiagonal, matriks Toeplitz pentadiagonal, matriks Toeplitz heptadiagonal dan sebagainya. Pada penelitian ini penulis membahas mengenai matriks Toeplitz heptadiagonal simetris. Sebelum membahas matriks Toeplitz heptadiagonal simetris terlebih dahulu dijelaskan mengenai matriks heptadiagonal yang akan disajikan sebagai berikut:

Definisi 2 [10]. Sebuah matriks bujursangkar berordo $n \times n$ yang terdiri dari tujuh diagonal tak nol yaitu diagonal utama, tiga subdiagonal atas dan tiga subdiagonal bawah disebut dengan matriks heptadiagonal. Berikut diberikan bentuk umum matriks heptadiagonal, yaitu:

$$M_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & \alpha_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_4 & \beta_4 & \alpha_4 & a_4 & b_4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_5 & \beta_5 & \alpha_5 & a_5 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-4} & b_{n-4} & c_{n-4} & d_{n-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-3} & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & d_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_n & \beta_n & \alpha_n & a_n \end{bmatrix}$$

Matriks Toeplitz heptadiagonal merupakan gabungan dari matriks Toeplitz dan matriks heptadiagonal. Berikut diberikan definisi beserta contoh mengenai matriks Toeplitz heptadiagonal.

Definisi 3 [11]. Matriks Toeplitz heptadiagonal ordo $n \times n$ mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & a & b & c & d & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & \alpha & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \beta & \alpha & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma & \beta & \alpha & a \end{bmatrix}, n \geq 5$$

dengan $\forall a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma \in R$.

Matriks Toeplitz heptadiagonal simetris merupakan gabungan dari matriks Toeplitz dengan matriks heptadiagonal simetris. Berikut diberikan definisi matriks Toeplitz heptadiagonal simetris.

Definisi 4 [9]. Sebuah matriks berukuran $n \times n$ disebut matriks Toeplitz heptadiagonal simetris jika mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} a & b & c & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & c & d & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & c & b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & c & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & c & b & a \end{bmatrix}, n \geq 5$$

Sementara, terminologi mengenai dasar-dasar matrik yang berkaitan dengan penelitian ini diambil dari [12]-[14].

Bahan dan Metode

Selanjutnya untuk mendapatkan bentuk umum trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua sampai empat secara garis besar ada dua perlakuan, yang pertama menentukan bentuk umum perpangkatan matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua. Sedangkan untuk perpangkatan tiga dan empat cukup dengan menentukan entri-entri diagonal utama dari perkalian matriks Toeplitz heptadiagonal simetris tersebut. Perlakuan kedua barulah diperoleh trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetrisnya. Berikut diberikan langkah-langkah penelitian secara rinci.

1. Diberikan suatu matriks Toeplitz heptadiagonal simetris H_n .
2. Mendapatkan bentuk umum matriks H_n^2 dengan cara $H_n^2 = H_n \cdot H_n$.
3. Mendapatkan diagonal utama matriks H_n^3 , dengan cara mengalikan entri-entri diagonal utama $H_n^2 \cdot H_n$.
4. Mendapatkan diagonal utama matriks H_n^4 , dengan cara mengalikan entri-entri diagonal utama $H_n^2 \cdot H_n^2$.
5. Membuktikan bentuk umum $tr(H_n^2)$, $tr(H_n^3)$ dan $tr(H_n^4)$ dengan menggunakan pembuktian langsung.

Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini diperoleh setelah mengikuti langkah-langkah yang telah dijelaskan pada metode penelitian di atas.

Teorema 5. Diberikan H_n suatu matriks Toeplitz Heptadiagonal simetris, maka diperoleh :

$$H_n^2 = [r_{ij}] = \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & , i = j = 1, n \\ a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 & , i = j = 2, n-1 \\ a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 & , i = j = 3, n-2 \\ a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 & , i = j = 4, \dots, n-3 \\ 2ab + bc + cd & , j = i+1, i = 1, n-1 \text{ atau } i = j+1, j = 1, n-1 \\ 2ab + 2bc + cd & , j = i+1, i = 2, n-2 \text{ atau } i = j+1, j = 2, n-2 \\ 2ab + 2bc + 2cd & , j = i+1, i = 3, \dots, n-3 \text{ atau } i = j+1, j = 3, \dots, n-3 \\ 2ac + b^2 + bd & , j = i+2, i = 1, n-2 \text{ atau } i = j+2, j = 1, n-2 \\ 2ac + b^2 + 2bd & , j = i+2, i = 2, \dots, n-3 \text{ atau } i = j+2, j = 2, \dots, n-3 \\ 2ad + 2bc & , j = i+3, i = 1, \dots, n-3 \text{ atau } i = j+3, j = 1, \dots, n-3 \\ 2bd + c^2 & , j = i+4, i = 1, \dots, n-4 \text{ atau } i = j+4, j = 1, \dots, n-4 \\ 2cd & , j = i+5, i = 1, \dots, n-5 \text{ atau } i = j+5, j = 1, \dots, n-5 \\ d^2 & , j = i+6, i = 1, \dots, n-6 \text{ atau } i = j+6, j = 1, \dots, n-6 \\ 0 & , \text{ untuk selainnya} \end{cases}$$

Bukti. Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks H_n^2 dilakukan menggunakan pembuktian langsung dengan cara mencari entri-entri dari perkalian $H_n^2 = H_n \cdot H_n$ yang dinotasikan dengan $H_n^2 = [r_{ij}]$. Perkalian matriks $H_n \cdot H_n$ dapat dianalisa dalam bentuk tiga rumusan umum yang akan dijabarkan sebagai berikut :

1. Menentukan entri-entri diagonal utama matriks $H_n^2 = [r_{ij}]$

$$r_{1,1} = r_{n,n} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \underbrace{0 + 0 + 0 \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-4 \text{ faktor}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$\begin{aligned} r_{2,2} = r_{n-1,n-1} &= b^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \underbrace{0 + 0 \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-5 \text{ faktor}} \\ &= a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{3,3} = r_{n-2,n-2} &= c^2 + b^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \underbrace{0 \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-6 \text{ faktor}} \\ &= a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{4,4} = r_{5,5} = r_{6,6} = r_{7,7} = \dots = r_{n-6,n-6} = r_{n-5,n-5} = r_{n-4,n-4} = r_{n-3,n-3} \\ = d^2 + c^2 + b^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \underbrace{0 \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-7 \text{ faktor}} \\ = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 \end{aligned}$$

2. Menentukan entri-entri subdiagonal atas matriks $H_n^2 = [r_{ij}]$

- a. Untuk $j = i + 1$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} r_{1,2} = r_{n-1,n} &= ab + ba + cb + dc + \underbrace{0 + 0 + 0 \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-4 \text{ faktor}} \\ &= 2ab + bc + cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2,3} = r_{n-2,n-1} &= bc + ab + ba + cb + dc + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-5 \text{ faktor}} \\ &= 2ab + 2bc + cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{3,4} = r_{4,5} = r_{5,6} = r_{6,7} = \dots = r_{n-6,n-5} = r_{n-5,n-4} = r_{n-4,n-3} = r_{n-3,n-2} \\ = cd + bc + ab + ba + cb + dc + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-6 \text{ faktor}} \\ = 2ab + 2bc + 2cd \end{aligned}$$

- b. Untuk $j = i + 2$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 2$

$$r_{1,3} = r_{n-2,n-1} = ac + b^2 + ca + db + \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-4 \text{ faktor}}$$

$$= 2ac + b^2 + db$$

$$r_{2,4} = r_{3,5} = r_{4,6} = r_{5,7} = \dots = r_{n-6,n-4} = r_{n-5,n-3} = r_{n-4,n-2} = r_{n-3,n-1}$$

$$= bd + ac + b^2 + ca + db + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-5 \text{ faktor}}$$

$$= 2ac + b^2 + 2bd$$

c. Untuk $j = i + 3$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 3$

$$r_{1,4} = r_{2,5} = r_{3,6} = r_{4,7} = \dots = r_{n-6,n-3} = r_{n-5,n-2} = r_{n-4,n-1} = r_{n-3,n}$$

$$= ad + bc + cb + da + \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-4 \text{ faktor}}$$

$$= 2ad + 2bc$$

d. Untuk $j = i + 4$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 4$

$$r_{1,5} = r_{2,6} = r_{3,7} = \dots = r_{n-6,n-2} = r_{n-5,n-1} = r_{n-4,n}$$

$$= bd + c^2 + db + \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-3 \text{ faktor}}$$

$$= 2bd + c^2$$

e. Untuk $j = i + 5$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 5$

$$r_{1,6} = r_{2,7} = \dots = r_{n-6,n-1} = r_{n-5,n}$$

$$= cd + dc + \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-2 \text{ faktor}} = 2cd$$

f. Untuk $j = i + 6$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 6$

$$r_{1,7} = \dots = r_{n-6,n} = d^2 + \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-1 \text{ faktor}} = d^2$$

g. Untuk $j = i + n - 1$ dengan $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$r_{1,n-6} = r_{2,n-5} = r_{3,n-4} = r_{4,n-3} = r_{5,n-2} = r_{6,n-1}$$

$$= a(0) + b(0) + c(0) + d(0) + 0(0) + 0(0) + 0(0) + \dots + 0(0) + 0(0)$$

$$+ 0(0) + 0(0) = 0$$

h. Untuk $j = i + n - 1$ dengan $i = 1$

$$r_{1,n} = a(0) + b(0) + c(0) + d(0) + 0(0) + 0(0) + 0(0) + \dots + 0(0) + 0(0) + 0(0) + 0(0)$$

$$= 0$$

Berdasarkan perkalian $H_n \cdot H_n$ pada entri-entri subdiagonal atas untuk $j = i + n - 7$ sampai dengan $j = i + n - 1$ seluruh entri-entrinya bernilai nol. Sementara entri-entri subdiagonal bawah matriks dilakukan dengan cara yang serupa.

Berdasarkan perkalian $H_n \cdot H_n$ pada entri-entri subdiagonal bawah untuk $i = j + n - 7$ sampai dengan $i = j + n - 1$ seluruh entri-entrinya bernilai nol.

Teorema 6. Diberikan matriks Toeplitz Heptadiagonal simetris, maka diperoleh entri-entri diagonal utama dari matriks Toeplitz Heptadiagonal simetris berpangkat tiga H_n^3 yang dinotasikan dengan s_{ij} untuk $i = j$ sebagai berikut:

$$s_{ij} = \begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 2b^2c + 4bcd & , \text{ untuk } i = j = 1, n \\ a^3 + 6ab^2 + 6ac^2 + 3ad^2 + 4b^2c + 6bcd & , \text{ untuk } i = j = 2, n - 1 \\ a^3 + 6ab^2 + 6ac^2 + 3ad^2 + 6b^2c + 8bcd & , \text{ untuk } i = j = 3, n - 2 \\ a^3 + 6ab^2 + 6ac^2 + 6ad^2 + 6b^2c + 12bcd & , \text{ untuk } i = j = 4, \dots, n - 3 \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian Teorema di atas dapat dilakukan dengan menggunakan pembuktian langsung dengan cara mencari entri-entri diagonal utama matriks H_n^3 dengan mengalikan $H_n^2 \cdot H_n$ yang dinotasikan dengan $H_n^3 = [s_{ij}]$. Untuk $H_n^2 \cdot H_n$ maka H_n^2 adalah matriks yang ada pada Teorema 5, dan H_n adalah matriks Toeplitz heptadiagonal simetris. Sehingga hasil perkalian entri-entri diagonal utama matriks $H_n^2 \cdot H_n$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} s_{1,1} = s_{n,n} &= (a^3 + ab^2 + ac^2 + ad^2) + (2ab^2 + b^2c + bcd) + (2ac^2 + b^2c + bcd) + (2ad^2 + 2bcd) \\ &\quad + \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-4 \text{ faktor}} \\ &= a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 2b^2c + 4bcd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2,2} = s_{n-1,n-1} &= (2ab^2 + b^2c + bcd) + (a^3 + 2ab^2 + 2ac^2 + ad^2) + (2ab^2 + 2b^2c + bcd) \\ &\quad + (2ac^2 + b^2c + 2bcd) + (2ad^2 + 2bcd) + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-5 \text{ faktor}} \\ &= a^3 + 6ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 4b^2c + 6bcd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{3,3} = s_{n-2,n-2} &= (2ac^2 + b^2c + bcd) + (2ab^2 + 2b^2c + bcd) + (a^3 + 2ab^2 + 2ac^2 + ad^2) \\ &\quad + (2ab^2 + 2b^2c + 2bcd) + (2ac^2 + b^2c + 2bcd) + (2ad^2 + 2bcd) \\ &\quad + \underbrace{0 + \dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-6 \text{ faktor}} = a^3 + 6ab^2 + 6ac^2 + 3ad^2 + 6b^2c + 8bcd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{4,4} = s_{5,5} = s_{6,6} = s_{7,7} = \dots = s_{n-6,n-6} = s_{n-5,n-5} = s_{n-4,n-4} = s_{n-3,n-3} \\ &= (2ad^2 + 2bcd) + (2ac^2 + b^2c + 2bcd) + (2ab^2 + 2b^2c + 2bcd) \\ &\quad + (a^3 + 2ab^2 + 2ac^2 + 2ad^2) + (2ab^2 + 2b^2c + 2bcd) + (2ac^2 + b^2c + 2bcd) \\ &\quad + (2ad^2 + 2bcd) + \underbrace{\dots + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0}_{n-7 \text{ faktor}} \\ &= a^3 + 6ab^2 + 6ac^2 + 6ad^2 + 6b^2c + 12bcd. \end{aligned}$$

Teorema 7. Diberikan matriks Toeplitz Heptadiagonal simetris. Entri-entri diagonal utama dari matriks H_n^4 yang dinotasikan dengan t_{ij} untuk $i = j$ sebagai berikut:

$$t_{ij} = \begin{cases} a^4 + 6a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 2b^4 + 2b^3d + 7b^2c^2 + 7b^2d^2 + 2c^4 + 7c^2d^2 + 2d^4 + 8ab^2c + 6bc^2d + 16abcd & , i = j = 1, n \\ a^4 + 6a^2(2b^2 + c^2 + d^2) + 5b^4 + b^2(4bd + 13c^2 + 12d^2) + 2c^4 + 8c^2d^2 + 2d^4 + 16ab^2c + 10bc^2d + 24abcd & , i = j = 2, n-1 \\ a^4 + 6a^2(2b^2 + 2c^2 + d^2) + 6b^4 + b^2(4bd + 20c^2 + 13d^2) + 5c^4 + 13c^2d^2 + 2d^4 + 24ab^2c + 16bc^2d + 32abcd & , i = j = 3, n-2 \\ a^4 + 12a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 6b^4 + 4b^2(2bd + 6c^2 + 5d^2) + 5c^4 + 20c^2d^2 + 5d^4 + 24ab^2c + 20bc^2d + 48abcd & , i = j = 4, n-3 \\ a^4 + 12a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 6b^4 + 8b^2(bd + 3c^2 + 3d^2) + 6c^4 + 20c^2d^2 + 5d^4 + 24ab^2c + 24bc^2d + 48abcd & , i = j = 5, n-4 \\ a^4 + 12a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 6b^4 + 8b^2(bd + 3c^2 + 3d^2) + 6c^4 + 20c^2d^2 + 5d^4 + 24ab^2c + 24bc^2d + 48abcd & , i = j = 6, n-5 \\ a^4 + 12a^2(b^2 + c^2 + d^2) + 6b^4 + 8b^2(bd + 3c^2 + 3d^2) + 6c^4 + 20c^2d^2 + 5d^4 + 24ab^2c + 24bc^2d + 48abcd & , i = j = 7, n-6 \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian dilakukan dengan menggunakan pembuktian langsung dengan cara mencari entri-entri diagonal utama matriks H_n^4 dengan cara mengalikan $H_n^2 \cdot H_n^2$ yang dinotasikan dengan $H_n^4 = [t_{ij}]$. Hasil perkalian entri-entri diagonal utama matriks $H_n^2 \cdot H_n^2$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} t_{1,1} = t_{n,n} &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + (2ab + bc + cd)^2 + (2ac + b^2 + bd)^2 + (2ad + 2bc)^2 \\ &\quad + (2bd + c^2)^2 + (2dc)^2 + (d^2)^2 \\ &\quad + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)}_{n-7 \text{ faktor}} \\ &= a^4 + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6a^2d^2 + 2b^4 + 2b^3d + 7b^2c^2 + 7b^2d^2 + 2c^4 + 7c^2d^2 + 2d^4 \\ &\quad + 8ab^2c + 6bc^2d + 16abcd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{2,2} = t_{n-1,n-1} &= (2ab + bc + cd)^2 + (a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2)^2 + (2ab + 2bc + cd)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 \\ &\quad + (2ad + 2bc)^2 + (2bd + c^2)^2 + (2cd)^2 + (d^2)^2 \\ &\quad + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)}_{n-8 \text{ faktor}} \\ &= a^4 + 12a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6a^2d^2 + 5b^4 + 4b^3d + 13b^2c^2 + 12b^2d^2 + 2c^4 + 8c^2d^2 \\ &\quad + 2d^4 + 16ab^2c + 10bc^2d + 24abcd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{3,3} = t_{n-2,n-2} &= (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ab + 2bc + cd)^2 + (a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2)^2 \\
&\quad + (2ab + 2bc + 2cd)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2 + (2bd + c^2)^2 + (2cd)^2 \\
&\quad + (d^2)^2 + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)}_{n-9 \text{ faktor}} \\
&= a^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 6a^2d^2 + 6b^4 + 6b^3d + 20b^2c^2 + 13b^2d^2 + 5c^4 + 13c^2d^2 \\
&\quad + 2d^4 + 24ab^2c + 16bc^2d + 32abcd \\
t_{4,4} = t_{n-3,n-3} &= (2ad + 2bc)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ab + 2bc + 2cd)^2 + (a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2)^2 \\
&\quad + (2ab + 2bc + 2cd)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2 + (2bd + c^2)^2 + (2cd)^2 \\
&\quad + (d^2)^2 + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)}_{n-10 \text{ faktor}} \\
&= a^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12a^2d^2 + 6b^4 + 8b^3d + 24b^2c^2 + 20b^2d^2 + 5c^4 + 20c^2d^2 \\
&\quad + 5d^4 + 24ab^2c + 20bc^2d + 48abcd \\
t_{5,5} = t_{n-4,n-4} &= (2bd + c^2)^2 + (2ad + 2bc)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ab + 2bc + 2cd)^2 \\
&\quad + (a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2)^2 + (2ab + 2bc + 2cd)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2 \\
&\quad + (2bd + c^2)^2 + (2cd)^2 + (d^2)^2 + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)}_{n-11 \text{ faktor}} \\
&= a^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12a^2d^2 + 6b^4 + 8b^3d + 24b^2c^2 + 24b^2d^2 + 6c^4 + 20c^2d^2 \\
&\quad + 5d^4 + 24ab^2c + 24bc^2d + 48abcd \\
t_{6,6} = t_{n-5,n-5} &= (2cd)^2 + (2bd + c^2)^2 + (2ad + 2bc)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ab + 2bc + 2cd)^2 \\
&\quad + (a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2)^2 + (2ab + 2bc + 2cd)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2 \\
&\quad + (2bd + c^2)^2 + (2cd)^2 + (d^2)^2 + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0) + (0)(0)}_{n-12 \text{ faktor}} \\
&= a^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12a^2d^2 + 6b^4 + 8b^3d + 24b^2c^2 + 24b^2d^2 + 6c^4 + 24c^2d^2 \\
&\quad + 5d^4 + 24ab^2c + 24bc^2d + 48abcd \\
t_{7,7} = \dots = t_{n-6,n-6} &= (d^2)^2 + (2cd)^2 + (2bd + c^2)^2 + (2ad + 2bc)^2 + (2ac + b^2 + 2bd)^2 \\
&\quad + (2ab + 2bc + 2cd)^2 + (a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2)^2 + (2ab + 2bc + 2cd)^2 \\
&\quad + (2ac + b^2 + 2bd)^2 + (2ad + 2bc)^2 + (2bd + c^2)^2 + (2cd)^2 + (d^2)^2 \\
&\quad + \underbrace{(0)(0) + \dots + (0)(0) + (0)(0)}_{n-13 \text{ faktor}} \\
&= a^4 + 12a^2b^2 + 12a^2c^2 + 12a^2d^2 + 6b^4 + 8b^3d + 24b^2c^2 + 24b^2d^2 + 6c^4 + 24c^2d^2 \\
&\quad + 6d^4 + 24ab^2c + 24bc^2d + 48abcd.
\end{aligned}$$

Akibat 8. Diberikan H_n suatu matriks Toeplitz heptadiagonal simetris, maka diperoleh :

- a. Trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua, yaitu :

$$tr(H_n^2) = na^2 + 2(n-1)b^2 + 2(n-2)c^2 + 2(n-3)d^2$$

- b. Trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat tiga, yaitu :

$$tr(H_n^3) = na^3 + 6(n-1)ab^2 + 6(n-2)ac^2 + 6(n-3)ad^2 + 6(n-2)b^2c + 12(n-3)bcd$$

- c. Trace matriks Toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat empat, yaitu :

$$\begin{aligned}
tr(H_n^4) &= na^4 + 12(n-1)a^2b^2 + 12(n-2)a^2c^2 + 12(n-3)a^2d^2 + 2(3n-5)b^4 \\
&\quad + 8(n-3)b^3d + 8(3n-8)b^2c^2 + 8(3n-11)b^2d^2 + 2(3n-10)c^4 \\
&\quad + 8(3n-13)c^2d^2 + 6(n-5)d^4 + 24(n-2)ab^2c + 8(3n-11)bc^2d + 48(n-3)abcd
\end{aligned}$$

Bukti. Bukti cukup jelas dengan memerhatikan jumlahan diagonal utama pada Teorema 5, Teorema 6 dan Teorema 7.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan di atas, maka kesimpulan dari penelitian ini berupa bentuk umum perpangkatan matriks toeplitz heptadiagonal simetris berpangkat dua sampai berpangkat empat. Sebagai akibat dari teorema adanya bentuk umum tersebut dapat ditemukan trace dari matriks tersebut.

Referensi

- [1] R. M. Gray. 2006. Toeplitz and Circulant Matrices: A review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, Vol. 2, No. 3: halaman. 155–239.
- [2] C. Brezinski, P. Fika, dan M. Mitrouli. 2012. Estimations of the Trace of Powers of Positive Self-adjoint Operators by Extrapolation of the Moments. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 39: halaman. 144–155.
- [3] J. Pahade dan M. Jha. 2015. Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, Vol. 5, No. 4 : halaman. 150–155.
- [4] F. Aryani, D. R. Sari, C. C. Marzuki, dan S. Gemawati. 2018. Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri*. Pekanbaru : halaman. 673–681
- [5] F. Aryani dan N. Husna. 2019. Trace Matriks Toeplitz Tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 5, No. 1 : halaman. 40–49.
- [6] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, dan A. N. Rahma. 2019. Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 5, No. 2 : halaman. 61–70.
- [7] M. A. Hadi. 2020. Trace Matriks Toeplitz-Hessenberg Berpangkat Bilangan Bulat Positif Empat. *Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*.
- [8] A. Y. Putri. 2020. Trace Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat. *Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*.
- [9] M. S. Solary. 2013. Finding Eigenvalues for Heptadiagonal Symmetric Toeplitz Matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 402, No. 2: hal. 719–730.
- [10] J. L. da Silva. 2017. On the Characteristic Polynomial, Eigenvectors and Determinant of Heptadiagonal Matrices,. *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. 65, Issue 9: halaman 1852-1866.
- [11] B. Talibi, A. A. Hadj, dan D. Sarsri. 2021. A Numerical Algorithm to Inversing a Toeplitz Heptadiagonal Matrix. *Palestine Journal of Mathematics*, Vol. 10, No. 1 : haamanl. 242–250.
- [12] H. Anton dan C. Rorres. 2005. *Elementary Linear Algebra*, Edisi ke sembilan. Jakarta. Erlangga.
- [13] James e. Gentle. 2017. *Matrix Algebra*, Edisi ke dua. Switzerland. Springer.
- [14] S. Banerjee dan A. Roy. 2014. *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*. Edisi Pertama. New York. Chapman and Hall/CRC.