Kaitan Antara Ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev dan Ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue

Pipit Pratiwi Rahayu

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia

Korespondensi; Email: pipitprahayu@yahoo.com

Abstrak

Ruang fungsi terukur dengan bentuk integral sebagai normnya telah banyak dikenal, salah satunya adalah ruang Lebesgue dan ruang Sobolev. Dalam aplikasi Matematika misalkan seperti mencari solusi dari suatu persamaan diferensial parsial, dua ruang tersebut sangat terasa kegunaannya, sehingga itulah alasan pentingnya mempelajai ruang-ruang fungsi terukur seperti ruang Lebesgue dan ruang Sobolev. Ruang Sobolev merupakan subset dari ruang Lebesgue, itu artinya setiap fungsi yang merupakan anggota ruang Sobolev juga merupakan anggota ruang Lebesgue. Kebalikan dari kondisi tersebut adalah belum tentu berlaku. Pada penelitian ini ditunjukkan sebuah contoh fungsi yang menerangkan bahwa fungsi tersebut merupakan anggota ruang Lebesgue tetapi bukan merupakan anggota ruang Sobolev. Dengan kata lain, ruang Sobolev merupakan subset sejati dari ruang Lebesgue.

Keywords: Ruang Lebesgue; Ruang Sobolev

Abstract

Measureable function space and its norm with integral form has been known, one of which is Lebegsue Space and Sobolev Space. In applied Mathematics like in finding solution of partial differential equations, that two spaces is soo usefulness. Sobolev space is subset of Lebesgue space, its mean if we have a function that element of Sobolev Space then its element of Lebesgue space. But the converse of this condition is not applicable. In this research, we will give an example to shows that there is a function element of Lebesgue space but not element of Sobolev space.

Keywords: Lebesgue Space; Sobolev Space

Pendahuluan

Dalam Analisis telah banyak dibahas mengenai ruang dan sifat-sifatnya, misalnya ruang fungsi terukur dan norma yang didefinisikan dengan integral. Ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue dan ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev termasuk ruang yang dibangun dari fungsi-fungsi terukur dan norma yang didefinisikan dengan integral.

Kegunaan ruang yang dibangun dari fungsi-fungsi terukur dalam bidang terapan misalnya pada penyelesaian persamaan diferensial parsial dan beberapa bidang lainnya mengakibatkan ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue dan ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev sangat penting untuk dipelajari dan dibahas.

Pada tulisan ini, pembahasan dimulai dengan penyajian definisi kedua ruang tersebut beserta sifat-sifatnya dan pada akhirnya juga disajikan contoh sebuah fungsi yang merupakan anggota ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue tetapi bukanlah anggota ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev.

Ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue

Definisi 1 [2]. Diberikan $\Omega \subset i^n$. Untuk $1 \leq p < \infty$, ruang $L^p(\Omega)$ didefinisikan sebagai himpunan $L^p(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \to i$, f terukur dan $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$. Norm $L^p(\Omega)$ didefinisikan dengan

$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Bilangan real M disebut batas essensial fungsi *f*, jika $|f(x)| \leq \mathrm{M}$ hampir dimana-mana pada Ω. Fungsi *f* dikatakan terbatas essensial jika *f* memiliki batas essensial. Supremum essensial fungsi *f* pada Ω didefinisikan sebagai $ess_{x\in\Omega} \sup f(x) = \inf\{M|f(x) \leq M \text{ pada } \Omega\}$. Untuk $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ merupakan himpunan semua fungsi terukur yang terbatas essensial pada Ω atau ditulis $L^\infty(\Omega) = f|f{:}\,\Omega \to i, f$ terukur dan $ess_{x\in\Omega} \sup|f(x)| < \infty\}$. Norm $L^\infty(\Omega)$ didefinisikan dengan $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = ess_{x\in\Omega} \sup|f(x)|$.

Teorema 2 (Pertidaksamaan Hlder pada $L^p(\Omega)$) [2]

(i) Jika $1 < p < \infty$, $f \in L^\infty(\Omega)$, dan $g \in L^\infty(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka $\left|\int_\Omega fg\, dx\right| \leq \int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}. \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

(ii) Jika $f \in L^1(\Omega)$ dan $g \in L^\infty(\Omega)$, maka $\left|\int_\Omega fg\, dx\right| \leq \int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}. \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Teorema 3 [2]. Diberikan $\Omega \subset i^n$, Ω terbatas. Jika $1 \leq p < q \leq \infty$, maka $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Bukti. Diketahui $1 \leq p < q \leq \infty$. Ambil sebarang $f \in L^q(\Omega)$, yaitu $f{:}\,\Omega \to i$, *f* terukur, dan $\int_\Omega |f(x)|^q dx < \infty$. Akan dibuktikan $f \in L^p(\Omega)$, yaitu $f{:}\,\Omega \to i$, *f* terukur, dan $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Dengan menggunakan Pertidaksamaan Hlder diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)|^p\, dx &\leq \left|\int_\Omega |f(x)|^p . 1\, dx\right| \\
&\leq \||f(x)|^p\|_{L^a(\Omega)} \|1\|_{L^b(\Omega)}, \text{ dengan } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\
&= \left(\int_\Omega ||f(x)|^p|^a dx\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_\Omega 1dx\right)^{\frac{1}{b}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)|^{p.a}\, dx\right)^{\frac{1}{a}} \left(\int_\Omega 1dx\right)^{\frac{1}{b}}
\end{aligned}$$

Oleh karena $\int_\Omega |f(x)|^q dx < \infty$ maka diambil $a = \frac{q}{p}$ dan $\frac{1}{b} = 1 - \frac{p}{q}$ sehingga pernyataan di atas menjadi

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |f(x)|^{p.\frac{q}{p}}\, dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1dx\right)^{1-\frac{p}{q}} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^q\, dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega 1dx\right)^{1-\frac{p}{q}} \\
&= \left(\left(\int_\Omega |f(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p \left(\int_\Omega 1dx\right)^{1-\frac{p}{q}} < \infty
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Dengan kata lain $f \in L^p(\Omega)$.

Jika $f \in L^\infty(\Omega)$ maka berlaku $\int_\Omega |f(x)|^p dx \leq \ ess_\Omega \sup|f(x)| \left(\int_\Omega 1dx\right) < \infty$. Jadi terbukti juga bahwa $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Dengan kata lain $f \in L^p(\Omega)$. ■

Ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev

Ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev merupakan suatu subset dari ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue karena pada ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev berisi fungsi-fungsi $f \in L^p(\Omega)$ yang memenuhi kondisi tertentu. Definisi ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev menggunakan fungsi terintegral lokal dan *weak derivatives*, oleh karena itu berikut akan dibahas terlebih dahulu mengenai fungsi terintegral lokal dan *weak derivatives*.

Definisi 4 [8]. Diberikan $\Omega \subset i^n$, Ω terbatas . Fungsi $f \in L^p(\Omega)$ dikatakan **terintegral lokal** jika nilai dari $\int_K |f(x)|^p dx$ ada untuk setiap himpunan kompak $K \subset \Omega$. Fungsi $f \in L^p(\Omega)$ yang terintegral lokal dapat ditulis $\in L^p_{loc}(\Omega)$.

Berikut akan dibahas derivatif lemah (*weak derivatives*) dalam $L^p(\Omega)$.

Definisi 5 [8].

(i) Support fungsi $\emptyset: i^n \to i$ ditulis $supp\ \emptyset$ didefinisikan sebagai $supp\ \emptyset \coloneqq cl\{x \in i^n : \emptyset(x) \neq 0\}$.

(ii) Himpunan $C_0^\infty(i^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi $\emptyset \in C^\infty(i^n)$ dengan $supp\ \emptyset$ kompak atau $C_0^\infty(i^n) = \{\emptyset \in C^\infty(i^n) : supp\ \emptyset \text{ kompak}\}$.

Selanjutnya, fungsi $\emptyset \in C_0^\infty(i^n)$ disebut fungsi tes pada i^n. Untuk mempersingkat penulisan, himpunan $C_0^\infty(i^n)$ ditulis dengan $D(i^n)$.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan Contoh berikut.

Contoh 6. Untuk $n = 2$, fungsi $\emptyset: i^2 \to i$ dengan

$$\emptyset(x) = \emptyset(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{(x_1^2 + x_2^2 - 1)^{-1}}, x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ \quad 0, x \text{ yang lain} \end{cases}$$

merupakan fungsi tes.

Definisi 7 [8]. Diberikan $\Omega \subset i^n$, Ω terbatas. Fungsi $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ dikatakan mempunyai derivative lemah order α pada Ω jika terdapat fungsi $g \in L^p_{loc}(\Omega)$ sehingga berlaku $\int_\Omega g\, \emptyset dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f\, D^\alpha \emptyset dx$, untuk setiap fungsi tes $\emptyset \in D(\Omega)$. Fungsi g merupakan derivative lemah order α dari fungsi f. Selanjutnya, derivative lemah order α dari fungsi f dapat ditulis sebagai $D_w^\alpha f$ dan $D_w^\alpha f = g$.

Hubungan antara derivatif sesungguhnya dengan derivatif lemah adalah sebagai berikut.

Teorema 8 [8]. Diberikan fungsi $f: \Omega \subset i^n \to i$. Jika fungsi f mempunyai derivative pada Ω maka fungsi f mempunyai derivative lemah pada Ω.

Bukti. Diketahui fungsi f mempunyai derivatif pada Ω maka fungsi f mempunyai derivatif di setiap titik $x \in \Omega$, sehingga derivatif parsial dari fungsi f atau $D^\alpha f$ ada, yaitu

$$D^\alpha f = g \tag{1}$$

Jika Persamaan (1) dikalikan dengan sebarang fungsi tes $\emptyset \in D(\Omega)$ maka

$$D^\alpha f.\emptyset = g.\emptyset \tag{2}$$

Jika Persamaan (2) diintegralkan pada Ω, maka

$$\int_\Omega D^\alpha f . \emptyset \, dx = \int_\Omega g . \emptyset \, dx \tag{3}$$

Perhatikan ruas kiri pada (3). Oleh karena $\emptyset \in D(\Omega)$, integral parsial pada ruas kiri (3) menjadi $\int_\Omega D^\alpha f . \emptyset \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \, D^\alpha \emptyset dx$, sehingga didapat

$$\int_\Omega g . \emptyset \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f . D^\alpha \emptyset \, dx \tag{4}$$

Persamaan (4) mengatakan bahwa fungsi f mempunyai derivatif lemah order α yaitu $D_w^\alpha f = g.$ ■

Sebaliknya dari Teorema 8 belum tentu berlaku, berikut diberikan contoh penyangkal.

Contoh 9. Misal $n = 1, \Omega = [-1,1]$ dan $f(x) = 1 - |x|$. Tunjukkan bahwa fungsi $f : \Omega \to i$ dengan

$$g(x) = \begin{cases} 1, -1 \le x < 0 \\ -1, 0 < x \le 1 \end{cases}$$

merupakan derivatif lemah order 1 dari fungsi f.

Harus ditunjukkan bahwa berlaku $\int_{-1}^{1} g(x)\phi(x)dx = (-1)\int_{-1}^{1} f(x)D\phi(x)dx$, yaitu

$$\begin{aligned}
(-1)\int_{-1}^{1} f(x)D\phi(x)dx &= (-1)\left[\int_{-1}^{0} f(x)D\phi(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)D\phi(x)dx\right] \\
&= (-1)\left[\left(f(x)\phi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\phi(x) f'(x)dx\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(f(x)\phi(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\phi(x) f'(x)dx\right)\right] \\
&= (-1)\left[\left((1+x)\phi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\phi(x).1dx\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left((1-x)\phi(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\phi(x).(-1)dx\right)\right] \\
&= \int_{-1}^{0}\phi(x).1dx + \int_{0}^{1}\phi(x).(-1)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\phi(x)g(x)dx.
\end{aligned}$$

Pada Akibat berikut dijelaskan bahwa fungsi $f \in C^m(\Omega)$ yang mempunyai derivatif lemah yang bernilai sama dengan derivatif sesungguhnya.

Akibat 10. Diberikan $\Omega \subset i^n$ terbatas dan $\Omega \neq \emptyset$. Jika $f \in C^m(\Omega)$ dan α multi indeks dengan $|\alpha| \le m$ maka derivatif lemah $D_w^\alpha f$ada dan $D_w^\alpha f = D^\alpha f$, hampir dimana-mana di dalam Ω.

Ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev dan kaitannya dengan ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue

Ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev merupakan subset dari ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue karena pada ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev berisi fungsi-fungsi $f \in L^p(\Omega)$ yang memenuhi kondisi tertentu. Berikut definisi lebih lengkapnya:

Definisi 11 [8]. Diberikan $m \in i$, $\Omega \subset i^n$ terbatas dan fungsi $f \in L^p(\Omega)$ dengan $D_w^\alpha f$ ada, untuk setiap $\alpha, |\alpha| \leq m$. Ruang Sobolev didefinisikan sebagai berikut:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \mid D_w^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \ni |\alpha| \leq m \right\},\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Jelas bahwa $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Norm Sobolev didefinisikan dengan

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left\| D_w^\alpha f \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \left| D_w^\alpha f(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < \infty,$$

dan untuk $p = \infty$, $\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| D_w^\alpha f \right\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \operatorname{ess}\sup_\Omega \left| D_w^\alpha f(\mathbf{x}) \right|.$

Selanjutnya dinotasikan $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Contoh 12. Diberikan $\Omega := (x_1, x_2)$. Ruang $W^{2,3}(\Omega)$ adalah himpunan fungsi $f(x), x \in \Omega$ dengan $D_w^\alpha f \in L^3(\Omega)$ untuk $|\alpha| \leq 2$. Norm Sobolev fungsi u adalah

$$\|u\|_{W^{2,3}(\Omega)} = \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(|u|^3 + \left| \frac{du}{dx} \right|^3 + \left| \frac{d^2u}{dx^2} \right|^3 \right) dx \right]^{\frac{1}{3}}$$

Menurut Definisi 11 di atas, terlihat jelas bahwa ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ merupakan subset dari ruang $L^p(\Omega)$ atau dengan kata lain setiap fungsi yang merupakan anggota ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ maka fungsi tersebut juga anggota ruang $L^p(\Omega)$. Namun sebaliknya beum tentu berlaku. Berikut diberikan contoh sebuah fungsi yang merupakan anggota ruang $L^p(\Omega)$ tetapi bukan merupakan anggota ruang Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

Contoh 13. Misal $n = 1, \Omega = (0,1)$ dan $f(x) = 2\sqrt{x}$. Tunjukkan bahwa fungsi $f \in L^2(\Omega)$ tetapi $f \notin W^{1,2}(\Omega)$. Harus ditunjukkan bahwa $\int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^2\, dx &= \int_0^1 \left(2\sqrt{x}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 4x\, dx \\ &= 2x^2 \Big|_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jelas bahwa fungsi $f \in C^1(\Omega)$ maka $D_w^1 f = D^1 f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sehingga

$$\int_0^1 \left|D_w^1 f(x)\right|^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= \ln|x|\Big|_0^1 .....(*)$$

Pada persamaan (*) di atas terlihat bahwa nilai $\int_0^1 |D_w^1 f(x)|^2\, dx$ tidak ada atau dengan kata lain $D_w^1 f(x) \notin L^2(\Omega)$. Jadi $f \notin W^{1,2}(\Omega)$.

Kesimpulan

Ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev merupakan subset sejati dari ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue artinya setiap fungsi yang merupakan anggota ruang $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev maka juga merupakan anggota ruang $L^p(\Omega)$ Lebesgue tetapi sebaliknya belum tentu berlaku.

Referensi

[1] **Budhi**, **W.S.**, 2001, *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya*, Penerbit ITB Bandung, Bandung.
[2] **Darmawijaya**, **S.**, 2006, *Pengantar Analisis Real*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
[3] **Darmawijaya**, **S.**, 2007, *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
[4] **Debnath**, **L.**, and **Mikusinski**, **P.**, 1999, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Second Edition, Academic Press, United States of America.
[5] **Fife P.C.**, 1988*, Dynamics of Intenal Layers and Diffusive Interfaces,* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, 53, Philadelphia.
[6] **Friedman**, **A.**, 1982, *Variational Principles and Free Boundary Problems,* John Wiley & Sons, Inc., United States of America.
[7] **Milan Miklavcic**, 1998, *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations,* World Scientific Publishing Co.pte.Ltd., Singapore.
[8] **Oden**, **J.**, **T.**, and **Reddy**, **J.**, **N.**, 1976, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley & Sons, Inc., United States of America.
[9] **Parzynski**, **W.R.**, and **Zipse**, **P.W.**, 1982, *Introduction to Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, United States of America.
[10] **Schwartz**, **A.**, 1960, *Analytic Geometry and Calculus,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., United States of America.