JURNAL FOURIER | Oktober 2024, Vol. 13, No. 2, 76-86 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2024.132.76-86 E-ISSN 2541-5239

Pemodelan *SITR* Pada Penyebaran Penyakit *Tuberculosis* Dengan Penggunaan Masker Medis Dan *Treatment*

Thessa Rahma Donita[1] , Irma Suryani[2]

[12]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Jalan Soebrantas No. 155 Pekanbaru, Indonesia.

Korespondensi; Irma Suryani, Email: irma.suryani@uin-suska.ac.id

Abstrak

Penelitian ini mengembangkan model SITR pada penyakit *tuberculosis* dengan menambahkan penggunaan masker medis dan *treatment*. Populasi dibagi menjadi *Susceptible without mask (S)* yaitu individu rentan tidak menggunakan masker medis, *Susceptible With Mask* (S_M) yaitu individu rentan dengan menggunakan masker medis, *Infected without mask (I)* yaitu individu terinfeksi yang tidak menggunakan masker medis, *Infected with mask* (I_M) yaitu individu terinfeksi yang menggunakan masker medis, *Treatment (T)* yaitu jumlah individu yang melakukan pengobatan, *Recovered (R)* yaitu jumlah individu sembuh. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit, bilangan reproduksi dasar R_0, analisis kestabilan dan simulasi numerik. Berdasarkan hasil penelitian hasil uji kestabilan titik ekuilibrium menggunakan nilai eigen diperoleh bahwa jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal, artinya populasi akan bebas dari penyakit *tuberculosis*. Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik lokal, artinya pada keadaan ini dalam populasi akan selalu terdapat penyakit *tuberculosis*.

Kata Kunci Bilangan Reproduksi Dasar, Kestabilan Model, Nilai Eigen, Titik Ekuilibrium, *Tuberculosis*

Abstract

This research develops the SITR model for tuberculosis by adding the use of medical masks and treatment. The population is divided into *Susceptible without mask* (S), namely Susceptible individuals who do not use medical masks, *Susceptible With Mask* (S_M) namely Susceptible individuals who use medical masks, *Infected without mask* (I) namely infected individuals who do not use medical masks, Infected with mask (I_M) is infected individuals who use medical masks, *Treatment* (T) is the number of individuals who received treatment, *Recovered* (R) is the number of recovered individuals. This research aims to determine the disease-free and endemic disease equilibrium points, the basic reproduction number R_0, stability analysis and numerical simulations. Based on the research results, the results of the equilibrium point stability test using eigenvalues show that if $R_0 < 1$ then the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable, meaning the population will be free from tuberculosis. *If* $R_0 > 1$ means the disease endemic equilibrium point is locally asymptotically stable, meaning that in this situation the population will always have tuberculosis.

Keywords: Basic Reproduction Number, Model Stability, Eigenvalue, Equilibrium Point, Tuberculosis.

Pendahuluan

Penyakit yang menular adalah suatu penyakit yang dapat transmisi/berpindah (*transportable disease*) atau penyakit yang mungkin ditimbulkannya komunikasi (penyakit menular), penyakit yang disebabkan oleh infeksi karena adanya mikroorganisme pathogen, termasuk virus, bakteri, jamur, protozoa, organisme multiseluler, dan protein abnormal disebut prion [1]. Salah satu contoh penyakit menular yaitu *Tuberculosis. Tuberculosis* (TBC atau TB) adalah penyakit bakteri menular yang berpotensi serius disebabkan oleh bakteri [2].

Berdasarkan data *World Health Organization* (WHO) dikatakan pada tahun 2014 penderita TB di Indonesia adalah negara ke -4 dengan jumlah pasien *tuberculosis* terbanyak di dunia setelah India, Cina, dan Afrika Selatan[3]. Cepatnya penyebaran TB di Indonesia pada tahun 2019 WHO *(World Health Organization*) melaporkan bahwa Indonesia menduduki menjadi posisi ketiga dengan kasus *tuberculosis* (TB) tertinggi di dunia setelah India dan Tiongkok sebanyak 5,6 juta pria, 3,2 juta Wanita dan 1,2 juta anak anak yang terinfeksi TB. Kasus semacam ini menunjukkan bahwa penyakit *tuberculosis* perlu mendapat perhatian lebih atau setidaknya dilakukan pencegahan[4]

Pemodelan matematika adalah proses mengkontruksi model matematika untuk menggambarkan keadaan dinamik suatu sistem. Pemodelan Matematika digunakan di berbagai bidang seperti ilmu Kesehatan. *Tuberculosis* adalah salah satu penyakit yang dapat dikontruksikan model matematikanya. Hal ini dapat dijadikan salah satu cara untuk membantu mengetahui kejadian penularan *Tuberculosis* dan membantu tenaga medis dalam pengambilan keputusan menghadapi penyebaran TB[5].

Pemodelan matematika sudah banyak dilakukan dan dikembangkan sebelumnya oleh beberapa peneliti. Pada penelitian Irma Suryani & Mela Yuenita.E[6] membahas tentang analisis kestabilan model MSEIR penyebaran penyakit difteri dengan *saturated incidence rate* yang hasilnya diperoleh bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal artinya untuk waktu yang cukup lama penyakit difteri akan punah dari populasi. Selanjutnya pada penelitian Daniel Chandra T. & Roudhotillah D.[7] tentang analisis kestabilan model penyebaran penyakit *tuberculosis* menggunakan MSEITR yang hasilnya bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit dalam keadaan stabil asimtotik lokal dan titik ekuilibrium endemiknya dalam keadaan stabil asimtotik lokal yang menyatakan bahwa penyakit *tuberculosis* tidak akan menjadi endemik. Selanjutnya peneliti Nur Inayah, dkk[8] mengembangkan model SIR pada penyebaran penyakit *tuberculosis* yang hasilnya menunjukkan bahwa nilai $R_0 < 1$. Hal ini berarti bahwa penyakit *tuberculosi*s dalam waktu mendatang akan menghilang. Namun jika nilai parameter dengan menggunakan masker medis dikurangi dan nilai parameter kontak penyebaran penyakit *tuberculosis* dinaikkan, maka nilai $R_0 > 1$ berarti penyakit *tuberculosis* akan menjadi endemik

Berdasarkan pemaparan di atas, pada penelitian ini dilakukan pengembangan model SIR pada artikel [8] dengan menambahkan kompartemen populasi yang melakukan pengobatan (T) yang menghasilkan model SITR. Dari model ini akan dicari titik ekuilibrium bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar, dan titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya dicari analisis kestabilan bebas penyakit dan endemik penyakitnya.

Landasan Teori

Tuberculosis

Tuberculosis (TB atau TBC) merupakan salah satu penyakit kronis yang berbahaya bagi Kesehatan. Dalam hal ini, TBC terjadi akibat infeksi bakteri yang menyerang organ pernapasan paru-paru. Penyakit ini menyebar melalui udara ketika penderita batuk, bersin, atau berbicara[9].

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara umum, definisi nilai eigen dan vector eigen adalah sebagai berikut:
Definisi 1. Jika sebuah matriks $n\ x\ n$ adalah A, maka sebuah vector tak nol x pada R^{n} disebut vector eigen dari A jika Ax, merupakan sebuah kelipatan scalar dari x; itu adalah

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

Untuk beberapa skalar λ. Skalar disebut nilai eigen dari A, dan x dikatakan sebagai vektor eigen yang sesuai dengan λ [10].

Persamaan Differensial dan Sistem Persamaan Differensial

Secara umum, definisi persamaan differensial adalah sebagai berikut:
Definisi 2. Suatu persamaan dikatakan Persamaan diferensial jika didalamnya terdapat satu turunan atau diferensial dari satu fungsi yang tidak diketahui [11].
Bentuk umum persamaan differensial:

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0$$

F ini disebut fungsi real yang mempunyai $(n+2)$ yaitu $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^ny}{dx^n}$

Sistem persamaan differensial merupakan kumpulan dari beberapa persamaan diferensial. Secara matematis dapat dibentuk sistem persamaan diferensial, sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, x) \quad (2)$$

Titik Ekuilibrium dan Analisis Kestabilan

Definisi 3. [12] Titik $\bar{x} \epsilon R^n$ merupakan titik ekuilibrium jika $f(\bar{x}) = 0$.
Selanjutnya akan dijelaskan definisi dan teorema kestabilan di titik ekuilibrium.
Definisi 4. [13] Titik ekuilibrium x yang memenuhi $f(x) = 0$ Jika:

1. Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untu setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \delta$ yang mengakibatkan $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \geq 0$
2. Stabil asimtotik jika $\bar{x}$ stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$, sehingga $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \delta_1$ yang mengakibatkan $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$
3. Tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak terpenuhi (1)
   Kestabilan titik ekuilibrium x dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu $\delta_i = 1,2, \dots, n$ yang dapat diperoleh dari persamaan karakteristik.

Teorema 5. [14] Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ dengan A adalah matriks berukuran $n \; x \; n$ memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $k \leq n$.

a. Titik ekuilibrium $\dot{x}$ dikatakan stabil asimtotik, jika hanya jika $R_e(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, k$.
b. Titik ekuilibrium $\dot{x}$ dikatakan stabil, jika hanya jika $R_e(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, k$.
c. Titik ekuilibrium $\dot{x}$ dikatakan tidak stabil, jika hanya jika $R_e(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, k$.

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata infeksi baru yang disebabkan oleh individu yang terinfeksi pada suatu populasi yang hanya terdiri dari individu yang rentan[14]. Penentuan bilangan reproduksi dasar ini akan diperoleh dengan mencari nilai eigen terbesar. Kondisi ini akan timbul yaitu salah satu diantara kemungkinan berikut[15]:

1. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang
2. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan menungkat menjadi wabah
3. Jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan menetap (endemik)

Bahan dan Metode

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Membuat asumsi, menentukan parameter dan variabel yang akan digunakan untuk pembentukan diagram komparteman model matematika penyakit *Tuberculosis* dengan penggunaan masker medis dan *Treatment* menggunakan model SIR dari penelitian sebelumnya oleh [8] dengan menambahkan kompartemen *treatment (T)*.
2. Mencari titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.
3. Mencari Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dan Analisis Kestabilan model.
4. Memasukkan nilai parameter dan melakukan simulasi model dari model yang diperoleh sebelumnya.

Hasil dan Pembahasan

Asumsi Model

Model yang digunakan dalam penyakit *Tuberculosis* adalah model *SITR (Susceptible, Infected, Treatment, Recovered)* yang dikembangkan dengan membagi populasi individu kedalam enam kompartemen. Asumsi pembentukan model matematika dari penyakit *Tuberculosis* dengan menggunakan masker medis dan *Treatment* adalah sebagai berikut:

1. Bakteri yang menyebabkan penyakit *Tuberculosis* adalah Mycobacteri*um Tuberculosis*.
2. Populasi diasumsikan tertutup, artinya tidak ada migrasi masuk atau pun keluar.
3. Tingkat kelahiran dan kematian alami suatu populasi dianggap sama.
4. Populasi diasumsikan bercampur secara homogen yang berarti setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lainnya.
5. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan.
6. Manusia yang rentan adalah manusia yang tidak memiliki imun dan belum tertular bakteri.
7. Individu yang telah melakukan pengobatan lengkap selama 6 bulan.
8. Individu yang telah terinfeksi jika diberikan *treatment* akan dapat terinfeksi kembali.
9. Terdapat faktor tingkat kesadaran manusia dalam penanggulangan penyakit *tuberculosis* dengan penggunaan masker medis.
10. Terdapat individu rentan yang menggunakan masker medis untuk menggulangi penyebaran penyakit tuberculosis.
11. Terdapat individu terinfeksi yang menggunakan masker medis untuk mengurangi penyebaran penyakit *tuberculosis*.
12. Diasumsikan tingkat kesembuhan individu terinfeksi terhadap penggunaan masker sama, karena penggunaan masker hanya berfungsi untuk mengurangi penyebaran bakteri *tuberculosis*.

Variabel dan Parameter

Variabel digunakan dalam model penyakit *tuberculosis* dengan penggunaan masker medis dan *treatment* yaitu sebagai berikut:

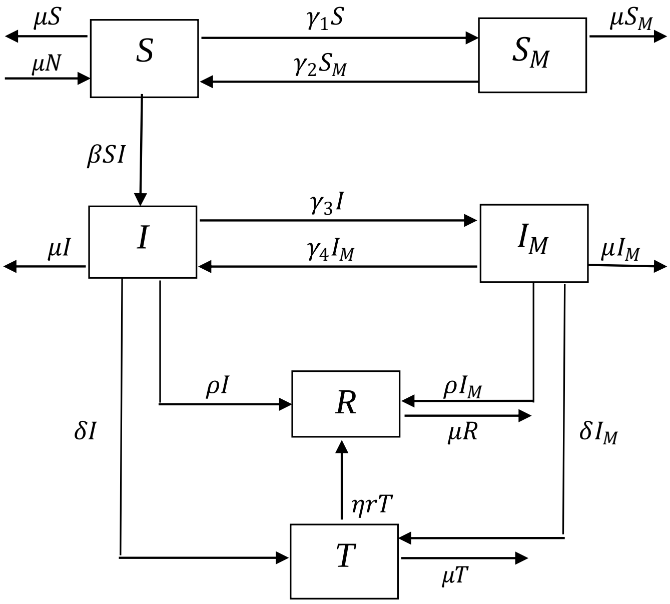
$S_M(t)$: Jumlah individu rentan yang menggunakan masker medis pada waktu ke-t
$I_M(t)$: Jumlah individu terinfeksi yang menggunakan masker medis pada waktu ke-t
$S(t)$: Jumlah individu rentan yang tidak menggunakan masker medis pada waktu ke-t
$I(t)$: Jumlah individu terinfeksi yang tidak menggunakan masker medis pada waktu ke-t
$R(t)$: Jumlah individu sembuh pada waktu ke-t
$T(t)$: Jumlah individu yang melakukan pengobatan pada waktu ke-t

Parameter- parameter yang digunakan adalah

μ : Laju kelahiran dan kematian alami populasi individu
β : Laju kontak individu terinfeksi dengan bakteri tuberculosis
ρ : Tingkat kesembuhan individu setelah terinfeksi
γ_1 : Tingkat kesadaran individu rentan dalam menggunakan masker medis
γ_2 : Tingkat ketidaksadaran individu rentan dalam menggunakan masker medis
γ_3 : Tingkat kesadaran individu terinfeksi dalam menggunakan masker medis
γ_4 : Tingkat ketidaksadaran individu terinfeksi dalam menggunakan masker medis
η : Laju perpindahan individu yang melakukan pengobatan menjadi individu sembuh
r : Proporsi keberhasilan pengobatan dari terinfeksi TB
δ : Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu yang melakukan pengobatan.

Model Matematika Penyakit *Tuberculosis*

Skema model matematika penyakit tuberculosis dengan penggunaan masker medis dan *treatment* dapat disajikan dengan diagram transfer pada Gambar 1 sebagai berikut:



Gambar 1 Diagram Kompartemen Model SITR

Sehingga formulasi untuk model $SITR$ yang selanjutnya disebut Sistem persamaan diferensial (3) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu N + \gamma_2 S_M - \mu S - \gamma_1 S - \beta SI,\\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI + \gamma_4 I_M - \gamma_3 I - \rho I - \mu I - \delta I,\\
\frac{dS_M}{dt} &= \gamma_1 S - \gamma_2 S_M - \mu S_M,\\
\frac{dI_M}{dt} &= \gamma_3 I - \gamma_4 I_M - \mu I_M - \rho I_M - \delta I_M,\\
\frac{dT}{dt} &= \delta I + \delta I_M - \eta r T - \mu T,\\
\frac{dR}{dt} &= \rho I + \rho I_M + \eta r T - \mu R.
\end{aligned} \tag{3}$$

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium yang diperoleh dari penyelesaian Persamaan (3) diatas diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu :

1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit
   Titik ekuilibrium bebas penyakit terjadi ketika tidak ada penyakit didalam populasi. Dengan substitusi nilai $I = I_M = 0$ dan mengenolkan ruas kanan, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakitnya $E_0(S, S_M T, I, I_M) = \left(\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}, \frac{\gamma_1(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}, 0,0,0\right)$
2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit
   Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium pada populasi atau pada kelas terinfeksi tidak nol. Maka haruslah $I^* > 0 \, dan \, I_M{}^* > 0$ dan mengenolkan ruas kanan, didapat titik kesetimbangan endemiknya adalah $E_1(S, S_M T, I, I_M) = (S^*, S_M{}^*, T^*, I^*, I_M{}^*)$ dengan

$$S^* = \frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{\beta I(\gamma_2+\mu)+\mu(\gamma_{1+}\gamma_2+\mu)}, \tag{4}$$

$$S_M{}^* = \frac{\gamma_1 S}{(\gamma_2+\mu)}, \tag{5}$$

$$T^* = \frac{\delta I+\delta I_m}{(\eta r+\mu)}, \tag{6}$$

$$I^* = \frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} - \left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right), \tag{7}$$

$$I_M{}^* = \frac{\gamma_3 I}{\gamma_4+\mu+\rho}. \tag{8}$$

Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar salah satunya bisa dengan menggunakan Persamaan (7) yang dioperasikan sebagai berikut:

$$I^* > 0$$

$$\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} - \left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right) > 0$$

Karena $\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} > \left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right)$ maka dapat didefinisikan bilangan reproduksi dasar R_0 sebagai berikut:

$$R_0 = \left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}\right)\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta}\right) \tag{9}$$

Teorema 6. Titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S^*, S_M{}^*, T^*, I^*, I_M{}^*)$ ada jika $R_0 > 1$.
Bukti. Untuk membuktikan setiap elemen di E_1 ada, akan ditunjukkan bahwa $I^* > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$ sehingga diperoleh

$$I^* = \left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right)(R_0 - 1).$$

Maka terbukti bahwa $I^* > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$. ■

Analisis Kestabilan

1. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Teorema 7. Misalkan titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 ada. Titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.
Bukti. Matriks Jacobian hasil linearisasi model pada Persamaan (3) disekitar titik ekuilibrium $E_0(S, S_M T, I, I_M)$ sebagai berikut:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dS} & \frac{dS}{dS_M} & \frac{dS}{dI} & \frac{dS}{dI_M} & \frac{dS}{dT} \\ \frac{dS_M}{dS} & \frac{dS_M}{dS_M} & \frac{dS_M}{dI} & \frac{dS_M}{dI_M} & \frac{dS_M}{dT} \\ \frac{dI}{dS} & \frac{dI}{dS_M} & \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dI_M} & \frac{dI}{dT} \\ \frac{dI_M}{dS} & \frac{dI_M}{dS_M} & \frac{dI_M}{dI} & \frac{dI_M}{dI_M} & \frac{dI_M}{dT} \\ \frac{dT}{dS} & \frac{dT}{dS_M} & \frac{dT}{dI} & \frac{dT}{dI_M} & \frac{dT}{dT} \end{bmatrix}$$

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -(\gamma_1+\mu) & \gamma_2 & -\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu} & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -(\gamma_2+\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu} - (\gamma_3+\mu+\rho+\delta) & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & -(\gamma_4+\mu+\rho+\delta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \delta & -(\eta r+\mu) \end{bmatrix}$$

maka diperoleh persamaan karakteristik dari matriks diatas adalah

$\lambda_1 = (-(\gamma_1+\mu))(-(\gamma_2+\mu)\gamma_1\gamma_2)$

$\lambda_2 = \left(\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu} - (\gamma_3+\mu+\rho+\delta)\big(-(\gamma_4+\mu+\rho+\delta)\big) - \gamma_3\gamma_4\right)$

$\lambda_3 = -(\eta r+\mu)$

maka dapat diperoleh bahwa nilai eigen $\lambda_1$dan λ_3 adalah bernilai negatif. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_2 < 0$, maka

$$\left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu} - (\gamma_3+\mu+\rho+\delta)\big(-(\gamma_4+\mu+\rho+\delta)\big) - \gamma_3\gamma_4\right) < 0$$

$$\left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}\right)\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta}\right)$$

$$\lambda_2 < 1$$

Oleh karena λ_1, λ_2, dan $\lambda_3 < 1$ berdasarkan Teorema 5 maka titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal. ■

2. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Teorema 8. Misalkan titik ekuilibrium endemik penyakit E_1 ada. Titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Bukti. Matriks Jacobian hasil linearisasi model pada Persamaan (3) disekitar titik ekuilibrium $E_1(S^*, {S_M}^*, T^*, I^*, {I_M}^*)$ sebagai berikut:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} \frac{dS^*}{dS^*} & \frac{dS^*}{d{S_M}^*} & \frac{dS^*}{dI^*} & \frac{dS^*}{d{I_M}^*} & \frac{dS^*}{dT^*} \\ \frac{d{S_M}^*}{dS^*} & \frac{d{S_M}^*}{d{S_M}^*} & \frac{d{S_M}^*}{dI^*} & \frac{d{S_M}^*}{d{I_M}^*} & \frac{d{S_M}^*}{dT^*} \\ \frac{dI^*}{dS^*} & \frac{dI^*}{d{S_M}^*} & \frac{dI^*}{dI^*} & \frac{dI^*}{d{I_M}^*} & \frac{dI^*}{dT^*} \\ \frac{d{I_M}^*}{dS^*} & \frac{d{I_M}^*}{d{S_M}^*} & \frac{d{I_M}^*}{dI^*} & \frac{d{I_M}^*}{d{I_M}^*} & \frac{d{I_M}^*}{dT^*} \\ \frac{dT^*}{dS^*} & \frac{dT^*}{d{S_M}^*} & \frac{dT^*}{dI^*} & \frac{dT^*}{d{I_M}^*} & \frac{dT^*}{dT^*} \end{bmatrix}$$

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -(\gamma_1+\mu) - \beta\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} - \left(\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right)\right) & \gamma_2 & -\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{\beta I(\gamma_2+\mu)+\mu(\gamma_{1+}\gamma_2+\mu)} & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -(\gamma_2+\mu) & 0 & 0 & 0 \\ \beta\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} - \left(\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right)\right) & 0 & \beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{\beta I(\gamma_2+\mu)+\mu(\gamma_{1+}\gamma_2+\mu)} - (\gamma_3+\mu+\rho+\delta) & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & -(\gamma_4+\mu+\rho+\delta) & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \delta & -(\eta r+\mu) \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik dari matriks diatas adalah

$$\lambda_1 = \left(-(\gamma_1+\mu) - \beta\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} - \left(\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right)\right)\big(-(\gamma_2+\mu)\big)\gamma_1\gamma_2\right)$$

$$\lambda_2 = \left((\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{\beta I(\gamma_2+\mu)+\mu(\gamma_{1+}\gamma_2+\mu)} - (\gamma_3+\mu+\rho+\delta)(-(\gamma_4+\mu+\rho+\delta) - \gamma_3\gamma_4)\right)$$

$$\lambda_3 = -(\eta r+\mu)$$

diperoleh bahwa nilai eigen $\lambda_1$dan λ_3 adalah bernilai negatif. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $\lambda_2 > 1$, misalkan $R_0 > 1$ diperoleh

$$\left((\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{\beta I(\gamma_2+\mu)+\mu(\gamma_{1+}\gamma_2+\mu)} - (\gamma_3+\mu+\rho+\delta)(-(\gamma_4+\mu+\rho+\delta) - \gamma_3\gamma_4)\right) > 1$$

$$\left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}\right)\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta}\right)$$

$$\lambda_2 > 1$$

Oleh karena λ_1, λ_2, dan $\lambda_3 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik lokal. ■

Simulasi Model

Nilai- nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

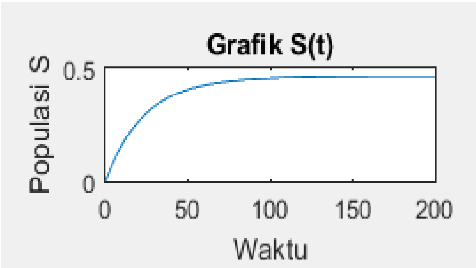
Tabel 1 nilai – nilai parameter

Parameter	Nilai	Satuan	Referensi
μ	0,02	perhari	[18]
β	$6{,}3257 \times 10^{-4}$	perhari	[8]
ρ	$5{,}5556 \times 10^{-3}$	perhari	[8]
γ_1	$2{,}3 \times 10^{-2}$	perhari	[8]
γ_2	$6{,}6 \times 10^{-8}$	perhari	[8]
γ_3	7×10^{-2}	perhari	[8]
γ_4	$1{,}3 \times 10^{-8}$	perhari	[8]
η	0,01	perhari	[18]
r	0,8	perhari	[18]
δ	0,001	perhari	[18]

1. Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

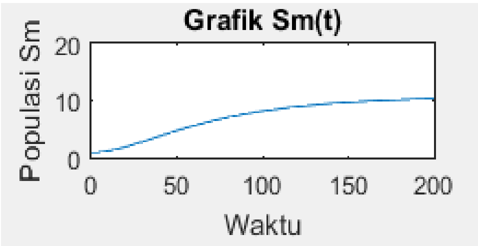
   Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1 diperoleh bilangan reproduksi awal $R_0 = \left(\beta \frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}\right)\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta}\right)$ atau $R_0 = 0{,}00142042001087$.

   Hasil simulasi menggunakan bantuan *software Mathlab* di titik ekuilibrium E_0 berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1 diasumsikan dengan nilai awal $S(0) = 0{,}3$, $S_M = 0{,}1$, $I = 0{,}2$, $I_M = 0{,}2$, $T = 0{,}1$, $R = 0{,}1$ diperoleh gambar berikut:



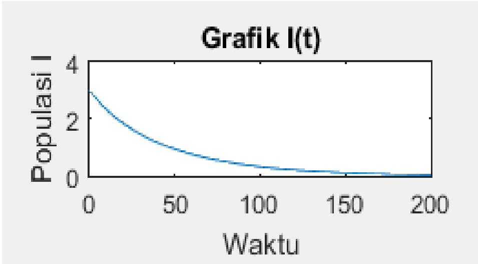
Gambar 2 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit pada Populasi S

   Berdasarkan Gambar 2, pada grafik populasi individu rentan tidak menggunakan masker (S) menunjukkan mengalami peningkatan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut.



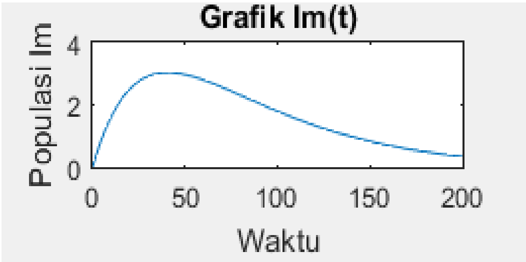
Gambar 3 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit pada Populasi S_M

   Pada Gambar 3, grafik populasi individu rentan menggunakan masker medis (S_M) menunjukkan peningkatan, hingga pada hari ke- 200 karena adanya kesadaran individu rentan dalam menggunakan masker medis dan stabil di titik tersebut.



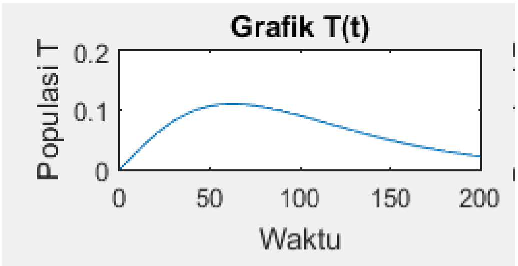
Gambar 4 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit pada Populasi I

Pada Gambar 4, grafik populasi individu terinfeksi tidak menggunakan masker (I) menunjukkan mengalami penurunan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut karena adanya kesadaran individu terinfeksi dalam menggunakan masker dan stabil di titik tersebut.



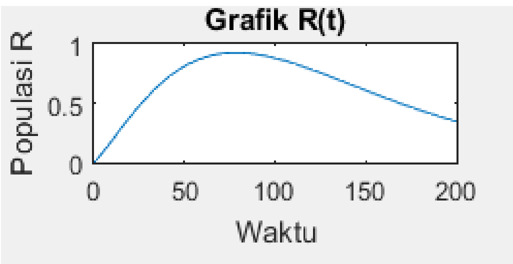
Gambar 5 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit pada Populasi I_m

Pada Gambar 5, grafik populasi individu terinfeksi menggunakan masker (I_M) menunjukkan mengalami penurunan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut.



Gambar 6 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit pada Populasi I_m

Pada Gambar 6, grafik populasi individu rentan yang melakukan pengobatan (T) menunjukkan mengalami penurunan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut.

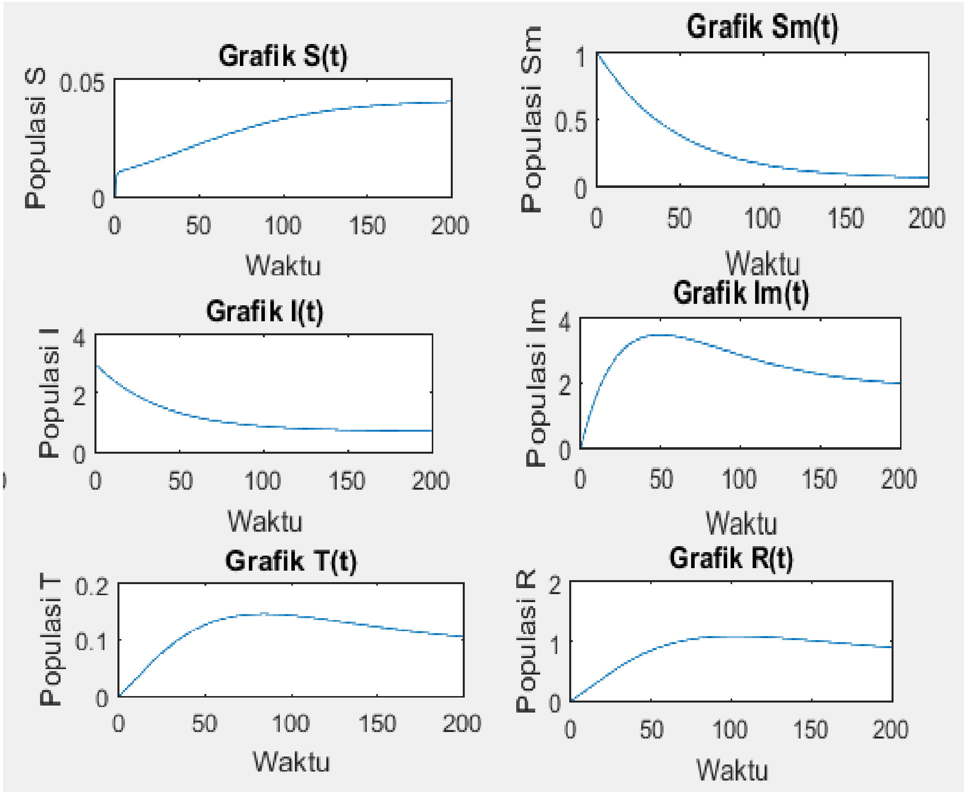


Gambar 7 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada Gambar 7, grafik populasi individu sembuh (R) menunjukkan mengalami penurunan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut.

2. Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit
   Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk $(\mathrm{R_0}) > 1$. Jika nilai parameter (γ_4) diperbesar $1{,}3 \times 10^{-8}$ menjadi $1{,}3 \times 10^{-4}$ dan nilai parameter β diperbesar $6{,}3257 \times 10^{-4}$ menjadi $6{,}3257 \times 10^{-1}$, maka akan diperoleh nilai $(\mathrm{R_0}) = 1.41540397948607$. Karena $(\mathrm{R_0}) > 1$ maka menurut Teorema 3 titik ekuilibrium endemik $(\mathrm{E_1})$ ada.

Hasil simulasi menggunakan bantuan *software Mathlab* di titik ekuilibrium E_1 berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1 diasumsikan nilai awal $S(0) = 0{,}3$, $S_M = 0{,}1$, $I = 0{,}2$, $I_M = 0{,}2$, $T = 0{,}1$, $R = 0{,}1$ diperoleh gambar berikut:



Gambar 8 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit Model SITR

Berdasarkan Gambar 8, grafik populasi individu rentan tidak menggunakan masker (S) menunjukkan mengalami peningkatan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut. Pada grafik populasi individu rentan menggunakan masker medis (S_M) menunjukkan penurunan, hingga pada hari ke- 200 karena adanya laju kelahiran dan kematian alami serta kesadaran individu rentan yang menggunakan masker medis dan stabil di titik tersebut. Pada grafik populasi individu terinfeksi tidak menggunakan masker (*I*) menunjukkan mengalami penurunan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut Pada grafik populasi individu terinfeksi menggunakan masker (I_M) menunjukkan mengalami peningkatan hingga hari ke-50 dan mengalami penurunan hingga stabil pada hari ke-200. Pada grafik populasi individu rentan yang melakukan pengobatan (T) menunjukkan mengalami peningkatan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut. Pada grafik populasi individu sembuh (R) menunjukkan mengalami peningkatan hingga hari ke-200 dan stabil pada titik tersebut.

Kesimpulan

Berdasarkan asumsi yang telah ditentukan dan pembahasan pada penelitian ini, diperoleh kesimpulan yaitu model matematika penyakit *tuberculosis* dengan penggunaan masker medis dan *treatment* adalah *Susceptible without mask (S)* yaitu individu rentan tidak menggunakan masker medis, *Susceptible With Mask* (S_M) yaitu individu rentan dengan menggunakan masker medis, *Infected without mask (I)* yaitu individu terinfeksi yang tidak menggunakan masker medis, *Infected with mask* (I_M) yaitu individu terinfeksi yang menggunakan masker medis, *Treatment (T)* yaitu jumlah individu yang melakukan pengobatan, *Recovered (R)* yaitu jumlah individu sembuh. Model yang telah dibentuk mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S, S_M T, I, I_M) =$

$\left(\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}, \frac{\gamma_1(\mu N)}{(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}, 0,0,0\right)$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit $E_1(S^*, {S_M}^*, T^*, I^*, {I_M}^*) = \left(\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{\beta I(\gamma_2+\mu)+\mu(\gamma_{1+}\gamma_2+\mu)}, \frac{\gamma_1 S}{(\gamma_2+\mu)}, \frac{\delta I+\delta I_m}{(\eta r+\mu)}, \frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta} - \left(\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}\right), \frac{\gamma_3 I}{\gamma_4+\mu+\rho}\right)$.
Bilangan reproduksi dasar (R_0) dari model yaitu $R_0 = \left(\beta\frac{(\gamma_2+\mu)(\mu N)}{(\gamma_2+\mu)(\gamma_2+\mu+\gamma_1)\mu}\right)\left(\frac{\gamma_4+\mu+\rho+\delta(\gamma_3+\mu+\rho+\delta)-\gamma_3\gamma_4}{\gamma_4+\mu+\rho+\delta}\right)$.
Berdasarkan hasil simulasi numerik menggunakan *software Mathlab 2015* bahwa $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit (S, I, T, R) stabil asimtotik lokal, artinya populasi akan bebas dari penyakit *tuberculosis*. Sedangkan $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, I^*, T^*, R^*) stabil asimtotik lokal, artinya pada keadaan ini dalam populasi akan selalu terdapat penyakit *tuberculosis.*

Referensi

[1] N. Zahwa, U. Nabilla, dan N. Nurviana, "Model Matematika $SITR$ pada Penyebaran Penyakit *Tuberculosis* Di Provinsi Aceh," *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains*, vol. 10, no. 1, pp. 8–14, 2022.
[2] I. Sukarsih, G. Gunawan, H. Gifty, dan G. Sarah, "Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Mempertimbangkan Faktor Gizi," in *Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Matematika (SEMIOTIKA)*, 2023.
[3] M. Rizki Ramadhan, S. Budi Waluya dan Muhammad Kharis, "Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Dengan Strategi DOTS," *Journal Of Mathematics,* 2018.
[4] A. Ma, A. Noor Hasmi, I. Anggriani, J. "Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Balikpapan dengan Pengaruh Migrasi," *SPECTA Journal of Technology*, 2022.
[5] M. Z. Ndii, *Pemodelan matematika*. Jawa Barat: Nasya Expanding Management (NEM), 2022.
[6] I. Suryani, "Analisis Kestabilan Model MSEIR Penyebaran Penyakit Difteri dengan Saturated Incidence Rate," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 2, no. 1, 2016.
[7] T. Daniel Chandra dan D. Roudhotillah, "Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Menggunakan Mseitr," *Jurnal Matematika, Sains dan Pembelajaran,* 2021.
[8] N. Inayah, M. Manaqib, N. Fitriyati, dan I. Yupinto, "Model Matematika Penyebaran Penyakit *Pulmonary Tuberculosis* dengan Penggunaan Masker Medis," *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 2020.
[9] I. Handayani, *Tuberkulosis*, Jawa Barat: Nasya Expanding Management (NEM), 2021.
[10] Anton, H. dan Rorres C. *Elementary Linear Algebra Applications Version Howard Edisi 1*, New York: John Wiley and Sons, 2013.
[11] D. Purnomo, *Persamaan Diferensial*, Malang: MNC Publishing, 2021.
[12] L. Perko, *Texts in Applied Mathematics 7 Differential Equations and Dynamical Systems Springer*, New York: Springer, 2013.
[13] G. J. Olsder and J. W. van der Woude, *Mathematical systems theory*, Netherlands: Universitas Pers, 2005.
[14] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, dan M. G. Roberts, "The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models," *Journal of the Royal Society Interface*, 2010.
[15] M. Ronoh *et al.*, "A Mathematical Model of Tuberculosis with Drug Resistance Effects," *Applied Mathematics*, 2016.
[16] D. I. Amatillah *et al.*, "Analisis Sensitivitas dan Kestabilan Global Model Pengendalian Tuberkulosis dengan Vaksinasi, Latensi dan Perawatan Infeksi," *Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika,* 2021