Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Diferensial Mathieu–Hill

Santosa, Muhammad Wakhid Musthofa, dan Malahayati

Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia

Korespondensi; Santosa, Email: santosa_bumen@yahoo.co.id

Abstrak

Berbagai masalah fisis dan geometri yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Salah satu analisis fisis tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial. Ilmuwan matematika yang bernama George W. Hill dan Mathieu meneliti tentang getaran pada pendulum gantung yang bisa dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial Mathieu-Hill. Persamaan diferensial Mathieu-Hill adalah persamaan diferensial orde dua yang didalam fungsi tersebut terdapat fungsi periodik. Persamaan diferensial Mathieu-Hill dapat diselesaikan dengan menggunakan metode aljabar matriks. Pada tahun 2005 sudah diteliti tentang solusi dari persamaan diferensial Mathieu-Hill. Penelitian ini menjelaskan tentang penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu Hill yang akan manghasilkan suatu solusi dalam bentuk persamaan periodik. Untuk lebih memahami penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill diberikan salah satu contoh aplikasinya dalam menghitung getaran pada mesin lokomotif kereta yang dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial Hill-Meissner.

Kata Kunci: Nilai batas; Diferensial Mathieu-Hill; Aljabar matriks; Diferensial Hill-Meissner

Abstract

A variety of physical and geometrical problems involving two functions or more independent variables are closely related to differential equations. One such physical analysis can be expressed in terms of differential equations. Mathematical scientists named George W. Hill and Mathieu examined the vibrations of pendulum that can be modeled in Mathieu-Hill differential equations. Mathieu-Hill differential equation is a second-order differential equation in which there is a periodic function. Mathieu-Hill differential equations can be solved by using matrix algebra method. In 2005 it has been studied about the solution of Mathieu-Hill differential equation. This research explains the solution of boundary value problems to Mathieu Hill differential equations which will produce a solution in the form of periodic equations. To better understand problem-solving the boundary value of the Mathieu-Hill differential equation is given one example of its application in calculating vibrations in rail locomotive engines modeled in the form of Hill-Meissner differential equations.

Keywords: Limit value; Mathieu-Hill Differential; Algebra matrix; Hill-Meissner Differential

Pendahuluan

Berbagai masalah fisis yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Masalah fisis yang paling sederhana dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan masalah fisis yang lebih komplek seperti mekanika fluida, teori elekromagnetik, dan sebagainya merupakan masalah-masalah fisis yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Salah satu analisis matematis dari masalah fisis tersebut dapat menghasilkan suatu persamaan diferensial yang dapat disederhanakan ke bentuk umum berikut,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0; \text{ dengan } 0 \le t \le T \tag{1}$$

dan $F(t)$ suatu fungsi periodik bernilai tunggal, dengan periode pokok T. Persamaan (1) disebut persamaan diferensial Mathieu-Hill [1] (Pipes, 1991:911). Persamaan Mathieu-Hill ini ditemukan oleh ilmuwan yang bernama Mathieu dan George W. Hill.

Woro Raharjanti [2] sudah meneliti tentang penyelesaian persamaan diferensial Mathieu-Hill, dalam penelitiannya Woro Raharjanti sudah menuliskan gambaran umum persamaan umum diferensial Mathieu-Hill beserta solusinya. Penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tersebut dengan menambahkan persamaan syarat batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill. Penulis menambahkan persamaan syarat batas bertujuan untuk menghilangkan konstanta pada penyelesaian umum persamaan diferensial Mathieu- Hill.

Suatu persamaan diferensial bersama dengan kondisi-kondisi tambahan terhadap fungsi yang dicari dan turunannya, yang semuanya diberikan pada nilai variabel bebas yang sama maka disebut permasalahan diferensial dengan nilai awal. Jika kondisi-kondisi tambahan diberikan untuk lebih dari satu nilai variabel bebas maka disebut permasalahan diferensial dengan nilai batas.

Penelitian ini akan menyajikan langkah-langkah penyelesaian persamaan (1) yang terikat oleh syarat-syarat nilai batas yang ditentukan. Penyelesaian persamaan diferensial akan lebih mudah dan cepat apabila digunakan suatu alat bantu seperti komputer. Saat ini perkembangan perangkat lunak komputer yang berbasis matematika sangatlah pesat. Hal ini terbukti dengan munculnya perangkat lunak yang dapat digunakan untuk kepentingan pengembangan matematika maupun penerapannya. Salah satu perangkat lunak yang dikembangkan untuk kepentingan Sistem Komputer Aljabar (*Computer Algebaric System*) adalah Maple. Maple banyak digunakan oleh para ilmuwan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika, karena Maple merupakan perangkat lunak yang lengkap dan komunikatif pada jenisnya.

Permasalahan yang dapat diselesaikan dengan Maple merupakan permasalahan matematika murni, seperti aljabar, geometri, kalkulus, matematika diskret, dan statistika. Dengan kemajuan teknologi tersebut penulis tertarik untuk menggunakan Maple dalam menghitung masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.

Penyelesaian Persamaan Diferensial Mathieu-Hill

Diberikan persamaan diferensial Mathieu-Hill

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0 \tag{2}$$

Pada selang $0 \leq t \leq T$ apabila dinyatakan dalam nilai-nilai awal untuk $y(t)$ dan $\frac{dy}{dt}$. Akan ditunjukkan bahwa solusi dari persamaan (2) adalah

$$y(t) = A\sin\sqrt{F(t)}\,t + B\cos\sqrt{F(t)}\,t \tag{3}$$

Dengan A dan B adalah suatu konstanta. Bentuk umum persamaan diferensial homogen orde kedua adalah

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0 \tag{4}$$

Dari persamaan (2) diperoleh $a = 1, b = 0$, dan $c = F(t)$.
Misal akar-akar dari persamaan (2) adalah t_1 dan t_2 sehingga:

$$t_1 = i\sqrt{F(t)} \text{ dan } t_2 = -i\sqrt{F(t)}$$

Sehingga solusi umumnya adalah:

$$y = (c_1 + c_2)\cos\sqrt{F(t)}\,t + (c_1 - c_2)i\sin\sqrt{F(t)}\,t$$

Missal: $A = (c_1 - c_2)$ dan $B(c_1 + c_2)$.
Jadi penyelesaian dari persamaan (3) adalah

$$y(t) = A\sin\sqrt{F(t)}\,t + B\cos\sqrt{F(t)}\,t$$

Fungsi $y(t)$ dan $\frac{dy}{dt} = v(t)$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$y(t) = A\sin\sqrt{F(t)}\,t + B\cos\sqrt{F(t)}\,t \tag{5}$$

Missal: $u = \sqrt{F(t)}$, sehingga

$$y(t) = A\sin u\,t + B\cos u\,t \tag{6}$$

$$v(t) = A\frac{du}{dt}\cos u\,t - B\frac{du}{dt}\sin u\,t \tag{7}$$

Persamaan (6) dan (7) bisa dituliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin ut & \cos ut \\ \frac{du}{dt}\cos u\,t & -\frac{du}{dt}\sin u\,t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{8}$$

Dari persamaan (8) dimisalkan:

$$w_0 = \begin{bmatrix} \sin ut & \cos ut \\ \frac{du}{dt}\cos u\,t & -\frac{du}{dt}\sin u\,t \end{bmatrix} \tag{9}$$

Determinan Wronskian dari persamaan tersebut adalah suatu tetapan pada selang pokok $0 \leq t \leq T$, yaitu:

$$|w_0| = \begin{vmatrix} \sin ut & \cos ut \\ \dfrac{du}{dt}\cos u\,t & -\dfrac{du}{dt}\sin u\,t \end{vmatrix} = -\frac{du}{dt}$$

Jika $\sin\sqrt{F(t)}\,t$ dan $\cos\sqrt{F(t)}\,t$ adalah dua solusi bebas linear karena $|w_0| \neq 0$, jadi matriks (9) mempunyai invers.
Sehingga invers dari matriks (9) adalah

$$w_0^{-1} = \frac{1}{-\frac{du}{dt}}\begin{bmatrix} -\frac{du}{dt}\sin ut & -\cos ut \\ -\frac{du}{dt}\cos u\,t & \sin u\,t \end{bmatrix} \tag{10}$$

Pada $t = 0$, nilai $y(t)$ dan $v(t)$ dinotasikan sebagai y_0 dan v_0. Dengan demikian persamaan (8) menjadi:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{du}{dt} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{-\frac{du}{dt}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{du}{dt} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Substitusi $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ pada persamaan (11) ke persamaan (8)

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos ut & \frac{\sin ut}{\frac{du}{dt}} \\ -\frac{du}{dt} \sin u\, t & \cos ut \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Pada akhir periode $t = T$, persamaan (12) berubah menjadi:

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \cos uT & \frac{\sin uT}{\frac{du}{dt}} \\ -\frac{du}{dt} \sin u\, T & \cos uT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Pada akhir periode kedua dari perubahan $F(t)$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{2T} = \begin{bmatrix} \cos uT & \frac{\sin uT}{\frac{du}{dt}} \\ -\frac{du}{dt} \sin u\, T & \cos uT \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Demikian juga dapat dilihat pada akhir periode ke-n, berlaku

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \begin{bmatrix} \cos uT & \frac{\sin uT}{\frac{du}{dt}} \\ -\frac{du}{dt} \sin u\, T & \cos uT \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan persamaan (2), jika dilakukan perubahan variabel dengan bentuk $\tau = t - nT$, dengan $0 \leq \tau \leq T$ dan $n = 0,1,2,3, \cdots$ maka diperoleh

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + F(\tau)y = 0 \text{ dengan } F(nT + \tau) = F(\tau).$$

Selanjutnya penyelesaian dalam selang ke $n + 1$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT+\tau} = \begin{bmatrix} \cos u\tau & \frac{\sin u\tau}{\frac{du}{dt}} \\ -\frac{du}{dt} \sin u\, \tau & \cos u\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} \tag{14}$$

Persamaan (14) merupakan penyelesaian persamaan Mathieu-Hill pada sembarang waktu $t > 0$ yang dinyatakan dalam syarat-syarat awal dan dua penyelesaian bebas linear persamaan hill dalam selang pokok $0 \leq t \leq T$.

Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Diferensial Mathieu-Hill

Berikut ini akan dibahas solusi dari persamaan diferensial Mathieu-Hill jika diberikan nilai batasnya. Diketahui persamaan diferensial Mathieu-Hill sebagai berikut.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0; \text{ dengan } 0 \leq t \leq T$$

Dengan:
y : Sumbu vertical
$F(t)$: Fungsi periodik terhadap t
t : Waktu

Penyelesaian umum dari persamaan Mathieu-Hill adalah

$$y(t) = A \sin \sqrt{F(t)}\, t + B \cos \sqrt{F(t)}\, t$$

Dengan memisalkan $u = \sqrt{F(t)}$, diperoleh persamaan (6) dan (7). Diberikan masalah nilai batas

$$a_1 y(0) + b_1 \frac{dy}{dt}(0) = 0 \tag{15a}$$

$$a_2 y(T) + b_2 \frac{dy}{dt}(T) = 0 \tag{15b}$$

Saat

$$y(T) = A \sin a\, T + B \cos a\, T \tag{16a}$$

$$\frac{dy}{dt}(T) = A \frac{du}{dt} \cos u\, T - B \frac{du}{dt} \sin u\, T \tag{16b}$$

Substitusi persamaan (16) ke (15), diperoleh

$$a_1 B + b_1 A \frac{du}{dt} = 0 \tag{17a}$$

$$a_2 (A \sin u\, T + B \cos u\, T) + b_2 \left(A \frac{du}{dt} \cos u\, T - B \frac{du}{dt} \sin u\, T \right) = 0 \tag{17b}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (17) gunakan integral. Dari persamaan (2) kita rubah ke bentuk persamaan:

$$L[y] = -[y']'$$

Dengan $y' = \frac{dy}{dt}$.

Diberikan v dan w adalah kontinu pada $0 \leq t \leq T$ dan $v' = \frac{dv}{dt}$, $w' = \frac{dw}{dt}$ sehingga:

$$\int_0^T L[v] w \, dt - \int_0^T v L[w] \, dt = [v'(t)w(t) - v(t)w'(t)]_0^T \tag{18}$$

Ambil persamaan sebelah kanan dengan mengasumsikan $b_1 \neq 0$ dan $b_2 \neq 0$ pada persamaan (15) maka persamaan (18) menjadi:

$$-[v'(t)w(t) - v(t)w'(t)]_0^T = 0$$

Dari persamaan (18) diperoleh:

$$\int_0^T \{L[v]w - vL[w]\}\, dt = 0$$

v dan w adalah fungsi real yang didefinisikan sebagai inner produk dengan interval, jadi dipunyai

$$(v,w) = \int_0^T v(t)w(t)\, dt \;\; 0 \le t \le T$$

Jika $v = \theta_m$ dan $w = \theta_n$ maka diperoleh

$$y = \int_0^T \theta_m\,(x)\theta_n(x)\, dx = \delta_{mn}$$

Dengan

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, \text{jika } m \ne n \\ T, \text{jika } m = n \end{cases} \tag{19}$$

Dari persamaan (17) diambil:

$$B + A\frac{du}{dt} = 0 \Leftrightarrow B = -A\frac{du}{dt} \tag{20}$$

$$(A\sin u\,T + B\cos u\,T)B + \left(A\frac{du}{dt}\cos u\,T - B\frac{du}{dt}\sin u\,T\right) = 0 \tag{21}$$

Dari persamaan (20) substitusi ke persamaan (21) diperoleh

$$y(t) - \left(A + A\frac{du^2}{dt}\right)\sin u\,T = 0 \tag{22}$$

Jika $\left(A + A\frac{du^2}{dt}\right) = 0$ maka $\sin u\,T \ne 0$ dan sebaliknya jika $\left(A + A\frac{du^2}{dt}\right) \ne 0$ maka $\sin u\,T = 0$. Jadi diperoleh:

$$y(t) - \left(A + A\frac{du^2}{dt}\right)\sin u\,t = 0 \tag{23}$$

Karena penyelesaian umum dari persamaan diferensial Mathieu-Hill berbentuk tunggal maka

$$y = \int_0^T (y(t))^2\, dt = T \tag{24}$$

Substitusikan persamaan (23) ke persamaan (24)

$$\left(A + A\frac{du^2}{dt}\right) = \left(\frac{2T}{T - \int_0^T \cos 2utdt}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

Substitusi persamaan (25) ke persamaan (23)

$$y(t) = \frac{\sqrt{2T}\sin ut}{\left(T - \int_0^T \cos 2ut dt\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{26}$$

Selanjutnya penyelesaian dalam selang ke $n-1$ diperoleh

$$\left(A + A\frac{du^2}{dt}\right) = \left(\frac{2(\tau + nT)}{nT - \int_0^{\tau+nT} \cos 2ut dt}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

Substitusi persamaan (27) ke persamaan (23), diperoleh

$$y(t) = \frac{\sqrt{2(\tau+nT)}\sin ut}{\left(nT - \int_0^{\tau+nT} \cos 2ut dt\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{28}$$

Jadi solusi dari persamaan diferensial Mathieu-Hill pada interval dengan $0 \leq t \leq T$ nilai batas

$$a_1 y(0) + b_1 \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

$$a_2 y(T) + b_2 \frac{dy}{dt}(T) = 0$$

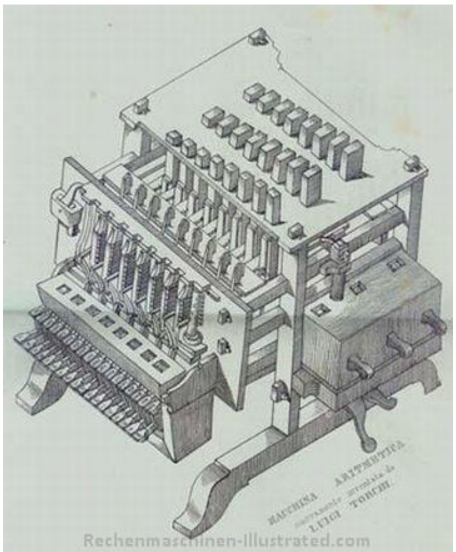
Adalah

$$y(t) = \frac{\sqrt{2(\tau+nT)}\sin ut}{\left(nT - \int_0^{\tau+nT} \cos 2ut dt\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{29}$$

Dengan $n = 1,2,3,\cdots$

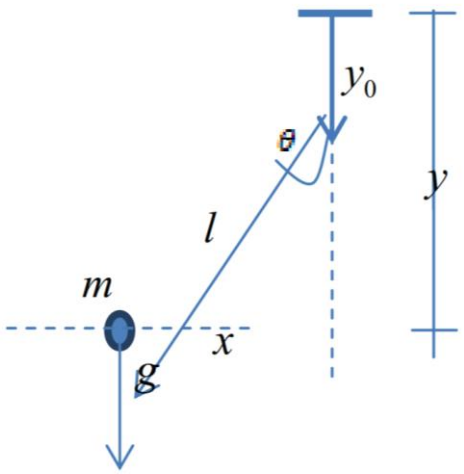
Aplikasi Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Hill-Meissner

Salah satu contoh penggunaan diferensial Mathieu-Hill dalam kehidupan sehari hari adalah menghitung getaran dalam mesin lokomotif kereta yang bisa dimodelkan dalam persamaan diferensial Hill-Messiner (Gambar 1).



Gambar 1 Mesin lokomotif.

Getaran pada mesin lokomotif dapat digambarkan dalam pendulum sederhana seperti Gambar 2.



Gambar 2 Pendulum.

Keterangan:
y : sumbu vertikal
x : sumbu horizontal
θ : sudut simpangan
l : panjang tali
m : massa benda
g : gravitasi

Dengan langkah yang sama untuk mencari persamaan (2) maka diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta \cos t)y = 0$$

Dengan

$$\alpha = \frac{mlA}{I}, \beta = \frac{mlg}{Iw^2}$$

A=amplitude dan I=momen inersia.

Misalkan $F(t) = \cos t$, maka diperoleh persamaan diferensial Hill-Meissner sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta F(t))y = 0$$

Persaamaan Hill-Meissner dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta F(t))y = 0, 0 \leq t \leq n \quad (30)$$

Dengan syarat batas:

$$y_1(0) = y_2(\pi) \quad (31)$$

$$\frac{dy_1}{dx}(0) = \frac{dy_2}{dx}(\pi) \quad (32)$$

Dengan π adalah periode dan

$$F(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ -1, \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \end{cases} \qquad F(t+\pi) = F(t)$$

Sehingga persamaan (30) menjadi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta)y = 0;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \tag{33}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha - \beta)y = 0;\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \tag{34}$$

Solusi dari persamaan (33) dan (34) untuk $\alpha + \beta > 0$ dan $\alpha - \beta > 0$ adalah

$$y_1(t) = A \sin\sqrt{\alpha + \beta t} + B \cos\sqrt{\alpha + \beta t}\,;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \tag{35}$$

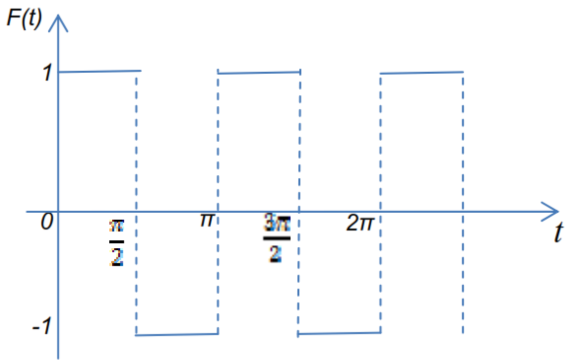
$$y_2(t) = C \sin\sqrt{\alpha - \beta t} + D \cos\sqrt{\alpha - \beta t}\,;\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \tag{36}$$

Sedangkan untuk $\alpha + \beta > 0$ dan $\alpha - \beta < 0$ solusinya adalah

$$y_1(t) = A \sin\sqrt{\alpha + \beta t} + B \cos\sqrt{\alpha + \beta t}\,;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \tag{37}$$

$$y_2(t) = C \exp\left(\sqrt{\alpha - \beta t}\right) + D \exp\left(-\sqrt{\alpha - \beta t}\right);\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \tag{38}$$

Berikut grafik persamaan Hill-Meissner



Gambar 3 Grafik periodik persamaan Hill-Meissner.

Untuk mencari α dan β fungsi $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ diturunkan terlebih dahulu, untuk $\alpha + \beta > 0$ dan $\alpha - \beta > 0$ diperoleh:

$$\frac{dy_1}{dx}(t) = A\sqrt{\alpha + \beta} \cos\sqrt{\alpha + \beta t} - B\sqrt{\alpha + \beta} \sin\sqrt{\alpha + \beta t} \tag{39}$$

$$\frac{dy_2}{dx}(t) = C\sqrt{\alpha - \beta} \cos\sqrt{\alpha - \beta t} - D\sqrt{\alpha - \beta} \sin\sqrt{\alpha - \beta t} \tag{40}$$

Substitusikan persamaan (35), (36), (39), dan (40) ke persamaan (31) dan (32) sehingga diperoleh:

$$B - C\sin\pi\sqrt{(\alpha-\beta)} - D\cos\pi\sqrt{(\alpha-\beta)} = 0 \tag{41}$$

$$A\sqrt{(\alpha+\beta)} - C\sqrt{(\alpha-\beta)}\cos\pi\sqrt{(\alpha-\beta)} + D\sqrt{(\alpha-\beta)}\cos\pi\sqrt{(\alpha-\beta)} = 0 \tag{42}$$

Pada saat $y_1(0) = y_2(\pi)$ dan $\frac{dy_1}{dx}(0) = \frac{dy_2}{dx}(\pi)$ diperoleh:

$$A\sin\frac{\pi\sqrt{(\alpha+\beta)}}{2} + B\cos\frac{\pi\sqrt{(\alpha+\beta)}}{2} - C\sin\frac{\pi\sqrt{(\alpha+\beta)}}{2} - D\cos\frac{\pi\sqrt{(\alpha-\beta)}}{2} = 0 \tag{43}$$

$$A\sqrt{(\alpha+\beta)}\cos\frac{\pi\sqrt{(\alpha+\beta)}}{2} - B\sqrt{(\alpha+\beta)}\sin\frac{\pi\sqrt{(\alpha+\beta)}}{2} - C\sqrt{(\alpha-\beta)}\cos\frac{\pi\sqrt{(\alpha+\beta)}}{2} + D\sqrt{(\alpha-\beta)}\sin\frac{\pi\sqrt{(\alpha-\beta)}}{2} = 0 \tag{44}$$

Susun persamaan (41), (42), (43), dan (44) menjadi matriks. Diperoleh bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\pi\sqrt{\alpha-\beta} & -\cos\pi\sqrt{\alpha-\beta} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\pi\sqrt{\alpha-\beta} & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\pi\sqrt{\alpha-\beta} \\ \sin\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & \cos\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} & -\cos\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} \\ \cos\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \tag{45}$$

Sistem (45) mempunyai penyelesaian nontrivial jika dan hanya jika determinannya adalah nol, sehingga

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\pi\sqrt{\alpha-\beta} & -\cos\pi\sqrt{\alpha-\beta} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\pi\sqrt{\alpha-\beta} & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\pi\sqrt{\alpha-\beta} \\ \sin\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & \cos\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} & -\cos\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} \\ \cos\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} \end{vmatrix} = 0 \tag{46}$$

Determinannya adalah

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\exp(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & -\exp(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(-\pi\sqrt{\alpha-\beta}) \\ \sin\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & \cos\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\exp(\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) & -\exp(-\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) \\ \cos\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(-\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) \end{vmatrix} = 0 \tag{47}$$

Jika $\alpha = 0$ maka akan diperoleh $\beta = \frac{12.5}{\pi}$. jadi diperoleh $\alpha = 0, \beta = 0$, dan $\beta = \frac{12.5}{\pi}$. Substitusikan nilai $\alpha = 0$ dan $\beta = \frac{12.5}{\pi}$ ke persamaan (37) dan (38), diperoleh

$$y_1(t) = A \sin \sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t + B \cos \sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \qquad (49)$$

$$y_2(t) = C \exp\left(\sqrt{-\frac{12.5}{\pi} t}\right) + D \exp\left(-\sqrt{-\frac{12.5}{\pi} t}\right);\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \qquad (50)$$

Jadi solusi umum dari persaman (30) adalah

$$y(t) = A \sin \sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t + B \cos \sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t;\ 0 \le t \le n \qquad (51)$$

Gunakan persamaan (26) untuk menyelesaiakan persamaan $y(t)$ pada interval $0 \le t \le \pi$.

$$y(t) = \frac{\sqrt{2\pi} \sin \sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t}{\left(\pi - \int_0^\pi \cos 2\sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t\, dt\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^\pi \cos 2\sqrt{\frac{12.5}{\pi}} t\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{50}} \sin \sqrt{50\pi}$$

Jadi penyelesaian untuk persamaan $y(t)$ pada batas $0 \le t \le \pi$ adalah:

$$y(t) = \frac{\sqrt{2\pi} \sin \sqrt{\frac{3}{\pi}} t}{\left(\pi - \sqrt{\frac{\pi}{50}} \sin \sqrt{50\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (52)$$

Visualisasi grafik persamaan Differensial Hill-Meissner

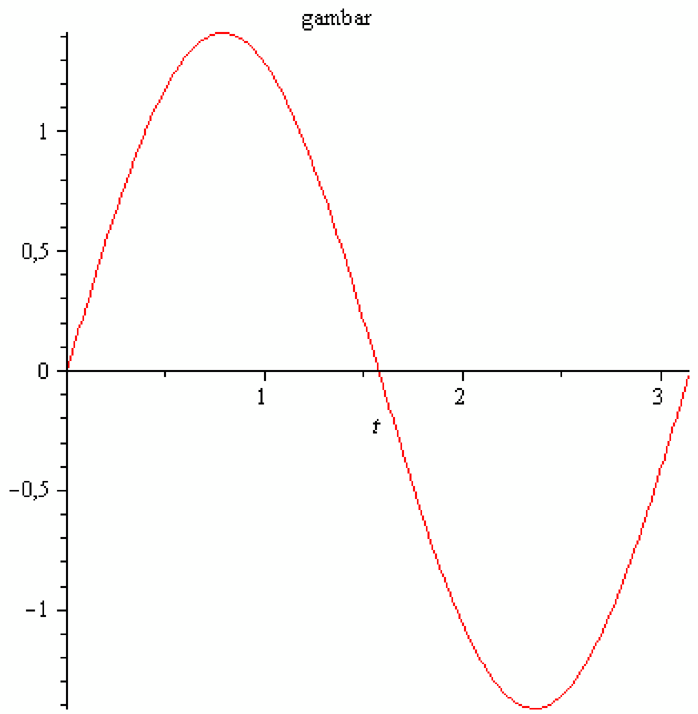
Berikut akan ditampilkan grafik dari persamaan diferensial Hill-Meissner, karena fungsi dari persaamaan (52) sangat rumit untuk digambarkan maka penulis menggunakan aplikasi Program Maple sehingga akan lebih mudah untuk menggambarnya. Inputkan persamaan (52) pada Program Maple, kemudian masukan batas-batasnya maka diperoleh hasil sebagai berikut:

〉 *restart*;

〉 $y(t) = \frac{\sqrt{2\pi} \sin \sqrt{\frac{3}{\pi}} t}{\left(\pi - \sqrt{\frac{\pi}{50}} \sin(\sqrt{50\pi})\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$y := t \to \frac{\sqrt{2\pi} \sin\left(\sqrt{\frac{12.5}{\pi}}\, t\right)}{\sqrt{\pi - \frac{\sqrt{\pi} \sin(\sqrt{50\pi})}{\sqrt{50}}}}$$

〉 $plot\ (y(t), t = 0, \cdots, \pi, title = "gambar");$



Gambar 4 Grafik masalah nilai batas pada diferensial Hill-Meissner.

Dari Gambar 4 bisa disimpulkan bahwa persamaan diferensial Hill-Meissner memiliki:

1. Panjang gelombang (λ) sebesar π
2. Amplitude (A) sebesar 1 satuan
3. Periode (T) sebesar π
4. Frekuensi gelombang (f) sebesar $\frac{1}{\pi}$

Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada penelitian ini, kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Bentuk persamaan Mathieu-Hill adalah $\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0$ pada interval $0 \leq t \leq T$. Dengan metode matriks diperoleh penyelesaian persamaan diferensial Mathieu-Hill pada sembaran $t > 0$ yang dinyatakan dalam nilai awal untuk $y(t)$ dan $\frac{dy}{dt}(t) = v(t)$ dengan dua penyelesaian bebas linear dan $u = \sqrt{f(t)}$ adalah:

   Pada saat $t = 0$

   $$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos ut & \dfrac{\sin ut}{\dfrac{du}{dt}} \\ -\dfrac{du}{dt}\sin ut & \cos ut \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

   Pada saat $t = T$

   $$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \cos uT & \dfrac{\sin uT}{\dfrac{du}{dt}} \\ -\dfrac{du}{dt}\sin uT & \cos uT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Demikian juga dapat dilihat pada akhir periode ke-n, berlaku

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \begin{bmatrix} \cos uT & \dfrac{\sin uT}{\frac{du}{dt}} \\ -\dfrac{du}{dt}\sin uT & \cos uT \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

2. Penyelesaian masalah nilai batas diferensial Mathieu-Hill dengan batas

$$a_1 y(0) + b_1 \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

$$a_2 y(T) + b_2 \frac{dy}{dt}(T) = 0$$

Adalah

$$y(t) = \frac{\sqrt{2(\tau+nT)}\sin ut}{\left(nT - \int_0^{\tau+nT} \cos 2ut dt\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Penginterpretasian hasil output dari program *Maple* identik dengan penyelesaian dengan penghitungan manual. Namun penghitungan dengan manggunakan *Maple* akan lebih akurat dan lebih mudah dalam menggambar grafik penyelesaiaannya.

Referensi

[1] **Pipes**, **Louis A**. 1991. *Matematika Terapan: untuk Para Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press. Rochmad.

[2] **Raharjanti**, **Woro**. 2007. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill* . Semarang: UNES.