

Pewarnaan Fraksional Fuzzy Pada Graf Fuzzy Beserta Aplikasinya Dalam Penjadwalan Ujian

Muhammad Lutfi Prakasta, Arif Munandar.

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta 55281, Indonesia.

Korespondensi; Arif Munandar, Email: arif.munandar@uin-suka.ac.id

Abstrak

Himpunan fuzzy dari waktu ke waktu terus berkembang. Himpunan fuzzy dikembangkan bersamaan dengan teori graf menghasilkan teori baru dinamakan graf fuzzy. Sebagaimana dalam teori graf terdapat pewarnaan, pada graf fuzzy juga terdapat pewarnaan. Inti pembahasan dari penelitian ini adalah pewarnaan fraksional fuzzy pada graf fuzzy. Pembahasan diawali dengan konsep dasar graf fuzzy dan pewarnaan graf fuzzy. Kemudian diakhiri dengan aplikasi penerapan pada penjadwalan ujian mahasiswa matematika.

Kata Kunci: Graf fuzzy, pewarnaan graf fuzzy, pewarnaan fraksional fuzzy.

Abstract

Fuzzy sets will continue to develop from year to year. The development of fuzzy sets and graph theory resulted a new theory called fuzzy graphs. Similar to graph theory, fuzzy graphs also have coloring techniques. The main discussion of this research is fuzzy fractional coloring on fuzzy graphs. The discussion begins with the basic concepts of fuzzy graphs and fuzzy graph coloring. Then, at the end of the discussion also includes the application on scheduling student math exams.

Keywords: Fuzzy graph, coloring of fuzzy graph, fuzzy fractional coloring.

Pendahuluan

Himpunan tegas merupakan salah satu ilmu dasar matematika. Himpunan tegas adalah suatu pengelompokan objek-objek tertentu yang memiliki karakteristik sama. Seiring perkembangan waktu, ditemukan keterbatasan dalam penggunaan himpunan tegas, misalnya keambiguan dalam penentuang kelompok suhu, kelompok umur manusia, dan lain-lain.

Himpunan fuzzy adalah solusi dari keambiguan yang disebabkan oleh himpunan tegas. Fuzzy atau himpunan fuzzy pertama kali dikenalkan oleh [1] sebagai fenomena ketidakpastian di dunia nyata. Fuzzy merupakan salah satu dampak besar terhadap perkembangan teknologi saat ini.

Graf pertama kali dikenalkan oleh Euler pada tahun 1736 sebagai solusi dari jembatan konisbreg. Graf merupakan salah satu bentuk pengembangan dari himpunan tegas. Pewarnaan graf merupakan salah satu bagian dari graf yang paling banyak diaplikasikan pada kehidupan nyata. Salah satu aplikasinya adalah pada bidang penjadwalan.

Graf fuzzy yang diperkenalkan oleh [2], merupakan pengembangan dari teori graf dan relasi fuzzy. Konsep dasar graf fuzzy yang meliputi vertek dan *edge* diperkenalkan oleh [3]. Konsep dan definisi tentang vertek, path, pohon, subgraph, serta komplemen dari graf fuzzy yang diperkenalkan oleh [4] atau [5]. Kemudian konsep tentang isomorfisma pada graf fuzzy diperkenalkan oleh [6]. Penelitian dalam [7] memperkenalkan konsep vertek *adjacent* kuat. Konsep tentang pewarnaan graf fuzzy diperkenalkan oleh

[8] dengan menggunakan α – cut. Setelah itu konsep *lexicographic product* dari dua graf fuzzy diperkenalkan oleh [9]. Kemudian [10] memperkenalkan konsep graf planar dan pewarnaan fuzzy pada graf fuzzy. Selanjutnya [11] mengusulkan suatu algoritma untuk menemukan himpunan fuzzy kromatik dari graf fuzzy. Konsep bilangan kromatik fuzzy pada gabungan dari graf fuzzy yang meliputi algoritma, sifat-sifatnya, dan aplikasi diperkenalkan oleh [12]. Terakhir [13] memperkenalkan konsep baru pewarnaan graf fuzzy yaitu pewarnaan fuzzy fraksional. Penelitian ini kemudian kami kembangkan untuk optimalisasi penjadwalan ujian.

Landasan Teori

Berikut ini diberikan konsep-konsep dasar yang akan digunakan pada bagian pembahasan, meliputi definisi dan teorema.

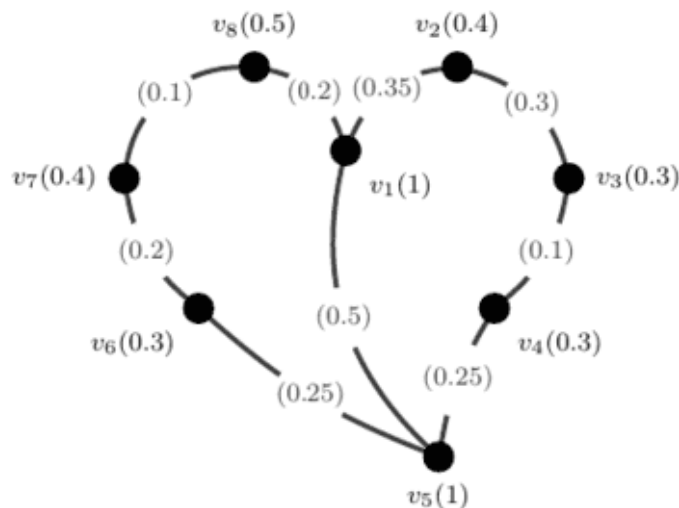
Definisi 1. [14] Diberikan suatu graf $G = (V, E)$ yang terdiri dari himpunan berhingga tak kosong vertek $V(G)$ dan himpunan berhingga edge $E(G)$, sedemikian hingga:

1. Setiap edge $E(G)$ menghubungkan tepat dua vertek berbeda dalam G .
2. Setiap dua vertek dalam $V(G)$ dihubungkan maksimal oleh 1 edge atau tidak terhubung sama sekali.

Definisi 2. [1] Diberikan suatu himpunan fuzzy A pada himpunan semesta X ditandai dengan fungsi yang dipetakan pada $[0, 1]$, disebut fungsi keanggotaan ($m : X \rightarrow [0, 1]$). Suatu Himpunan fuzzy A dinotasikan dengan $A = (X, m)$.

Setelah diberikan definisi dari graf dan fuzzy, selanjutnya akan diberikan definisi dari graf fuzzy. Berikut adalah definisi dari graf fuzzy.

Definisi 3. [2] Diberikan suatu graf fuzzy rangkap tiga $G = (V, \sigma, \mu)$ dengan dasar graf konvensional $G^* = (V, E)$ dimana $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ adalah suatu himpunan fuzzy pada V dan $\mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$ adalah suatu himpunan fuzzy pada $V \times V$. Sedemikian hingga $\mu(a, b) \leq \min\{\sigma(a), \sigma(b)\}$, untuk setiap $(a, b) \in V \times V$ dan $\mu(a, b) = 0$, untuk setiap $(a, b) \in (V \times V - E)$. Dimana σ merupakan nilai keanggotaan dari vertek G dan μ merupakan nilai keanggotaan dari edge G .



Gambar 1. Graf fuzzy G

Definisi 4. [15] Diberikan graf fuzzy $G = (V, \sigma, \mu)$. Dua vertek berbeda a dan b disebut *adjacent kuat* jika memenuhi

$$\frac{1}{2} \min\{\sigma(a), \sigma(b)\} \leq \mu(ab)$$

dan disebut *adjacent tidak kuat* jika memenuhi

$$\frac{1}{2} \min\{\sigma(a), \sigma(b)\} > \mu(ab).$$

Selanjutnya akan diberikan teorema yang menjamin vertek disebut sebagai adjacent kuat.

Teorema 5. Diberikan graf fuzzy G . Jika nilai keanggotaan edge $\mu(ab) \geq 0.5$, maka kedua vertek yang dihubungkan oleh edge tersebut adalah vertek adjacent kuat.

Bukti. Diambil sebarang edge dengan nilai keanggotaan terkecil yang memenuhi $\mu(ab) \geq 0.5$, yaitu $\mu(ab) = 0.5$. Kemudian 1 adalah nilai keanggotaan terbesar dari suatu vertek yang memungkinkan. Selanjutnya dengan menggunakan edge $\mu(ab) = 0.5$ dan vertek dengan nilai keanggotaan terbesar yaitu 1, diperoleh nilai terbesar dari

$$\frac{1}{2} \min\{\sigma(a), \sigma(b)\} \rightarrow \frac{1}{2} \min\{1, 1\} = 0.5$$

sehingga

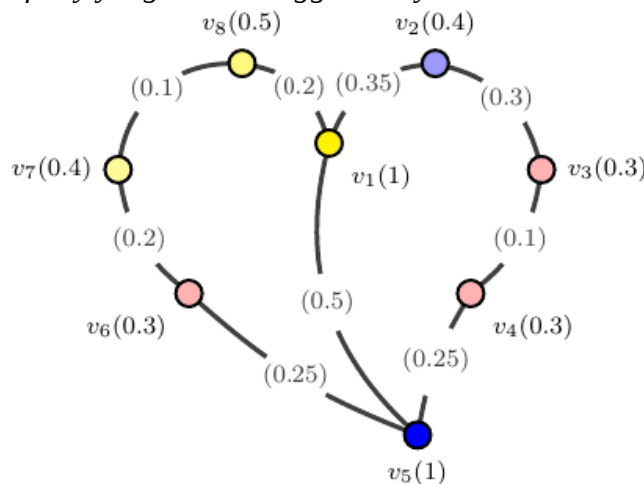
$$\frac{1}{2} \min\{1, 1\} \leq 0.5 \rightarrow 0.5 \leq 0.5.$$

Akibatnya untuk suatu vertek adjacent dengan nilai keanggotaan edge $\mu(ab) \geq 0.5$ memenuhi

$$\frac{1}{2} \min\{\sigma(a), \sigma(b)\} \leq \mu(ab) \rightarrow 0.5 \leq \mu(ab).$$

Jadi vertek tersebut adalah vertek adjacent kuat. ■

Definisi 6. [15] Diberikan himpunan warna dasar $C = C_1, C_2, \dots, C_n$. Himpunan fuzzy (C, f) disebut himpunan warna fuzzy, dimana $f: C \rightarrow [0, 1]$ adalah fungsi keanggotaan dari warna C_i . Warna $c_i = (c_i, f(c_i))$ adalah warna fuzzy yang sesuai dengan warna dasar c_i dan f_i adalah fungsi keanggotaannya. Warna dasar adalah warna fuzzy yang nilai keanggotaannya 1.



Gambar 2. Pewarnaan graf fuzzy G

Berdasarkan Gambar 2. diperoleh pewarnaan graf fuzzy G dengan menggunakan 3 warna dasar yaitu merah, biru, dan kuning. Bilangan kromatik dari graf fuzzy G adalah 2, karena terdapat dua warna berbeda dengan nilai keanggotaan 1 yaitu pada v_1 kuning dan v_5 biru.

Definisi 7. [13] Diberikan graf fuzzy $G = (V, \sigma, \mu)$. Himpunan $I_D \subset V$ disebut himpunan independen jika $\mu\{ab\} < \frac{1}{2} \min\{\sigma(a), \sigma(b)\}$, untuk setiap $a, b \in I_D$.

Definisi 8. [13] Diberikan himpunan $I(G)$ adalah semua himpunan independen dari suatu graf fuzzy $G = (V, \sigma, \mu)$. Pemetaan $f: I(G) \rightarrow [0, 1]$ disebut perwarnaan fraksional fuzzy dari G jika $\sum_{v \in S, S \in I(G)} f(S) \geq 1$ untuk setiap $v \in V$. Jumlah nilai fungsional dari semua himpunan independen disebut bobot pewarnaan fraksional fuzzy. Bobot terkecil dari pewarnaan fraksional fuzzy disebut bilangan kromatik fraksional fuzzy dari G dinotasikan dengan $\gamma_F(G)$.

Definisi 9. [13] Perwarnaan fraksional fuzzy dari graf fuzzy $G = (V, \sigma, \mu)$ dikatakan teratur jika $\sum_{v \in S, S \in I(G)} f(S) = 1$ untuk setiap $v \in V$.

Algoritma 10. [13] Diberikan suatu graf fuzzy $G = (V, \sigma, \mu)$. Pewarnaan fraksional fuzzy pada graf fuzzy dapat dilakukan dengan sebagai berikut.

Langkah 1 Cari vertek adjacent kuat pada graf fuzzy G .

Langkah 2 Hilangkan semua edge yang menjadi penghubung vertek adjacent tidak kuat.

Langkah 3 Kemudian, cari himpunan independen di antara vertek adjacent kuat. Karena graf yang diberikan berhingga, maka jumlah himpunan independen juga berhingga.

Langkah 4 Untuk setiap himpunan independen dipilih satu warna.

Langkah 5 Bagikan sebagian kecil ke setiap himpunan independen sedemikian hingga

$$\sum_{V \in S, S \in I(G)} f(S) \geq 1$$

Langkah ini dapat dilakukan dengan menyelesaikan program linier berikut:

Minimalkan $z = cx$ pada $Ax \geq 1$ dan $x > 0$, di mana

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, setiap $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ merepresentasikan bobot warna,

$1 = [1, 1, \dots, 1]^T = C^T$

$0 = [0, 0, \dots, 0]$

kemudian matrik A dapat dibangun dengan cara berikut:

1. Baris matrik merepresentasikan vertek dan kolom matrik merepresentasikan semua himpunan independent.
2. Setiap baris adalah fungsi karakteristik himpunan independen dengan entri 1 pada kolom yang bersesuaian atas vertek dan 0 jika tidak.

sementara z adalah bilangan kromatik fraksional fuzzy dari graf fuzzy G .

Langkah 6 Untuk vertek adjacent tidak kuat, beri warna yang sama dengan vertek yang berdekatan.

Bahan dan Metode

Survei diisi oleh 30 mahasiswa prodi matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta angkatan 2020 menghasilkan sebaran mata kuliah berikut

Tabel 1 Sebaran peserta mata kuliah semester 5 tahun ajaran 2022/2023.

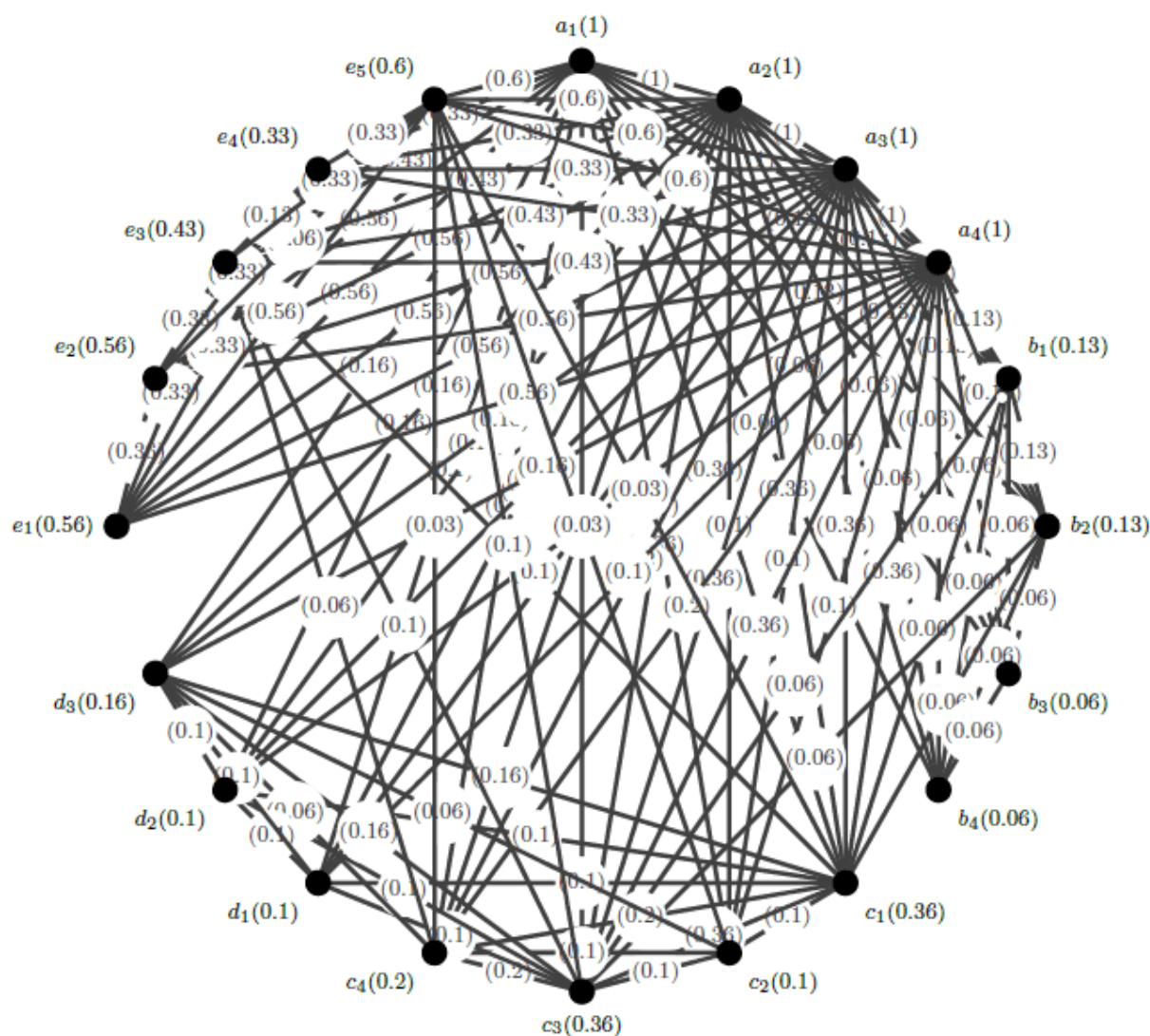
No	Mata Kuliah	Notasi	Peserta	Jml
1	Usul Fiqh	a_1	Semua responden	30
2	Keuangan Islam	a_2	Semua responden	30
3	Ilmu Falak	a_3	Semua responden	30
4	Matematika Keuangan	a_4	Semua responden	30
5	Pengantar Analisis Fungsional	b_1	Awal, Dhiya, Ifa, Silvia	4
6	Fungsi Variabel Kompleks	b_2	Awal, Dhiya, Ifa, Silvia	4
7	Analisis Vektor	b_3	Dhiya, Ifa	2
8	Geometri Analitik	b_4	Dhiya, Ifa	2
9	Teori Bilangan	c_1	Aulia, Awal, Clarissa, Devi, Fauzi, Ilma, Kamal, Maul, Rido, Shofi, Silvia	11
10	Teori Grup Hingga	c_2	Aulia, Clarissa, Shofi	3
11	Logika Fuzzy	c_3	Aulia, Awal, Clarissa, Devi, Fauzi, Ilma, Kamal, Maul, Rido, Shofi, Silvia	11
12	Teori Pengkodean	c_4	Aulia, Clarissa, Fauzi, Ilma, Kamal, Shofi	6
13	Riset Operasi	d_1	Devi, Maul, Rido	3
14	Matematika Biologi	d_2	Devi, Maul, Rido	3

15	Teori Permainan	d_3	Clarissa, Devi, Maul, Rido, Shofi	5
16	Analisis Regresi	e_1	Alfiyah, Alvia, Ana, Annindiya, Ardit, Brenda, Cindy, Evi, Fatma, Linggar, Reni, Reta, Rifa'i, Risma, Viona, Yumna, Zuva	17
17	Analisis Multivariat	e_2	Alfiyah, Alvia, Ana, Annindiya, Ardit, Brenda, Cindy, Evi, Fatma, Linggar, Reni, Reta, Rifa'i, Risma, Viona, Yumna, Zuva	17
18	Analisis Data	e_3	Alfiyah, Ana, Ardit, Fatma, Fauzi, Ilma, Kamal, Reni, Reta, Rifa'i, Risma, Viona, Yumna	13
19	Rancangan Percobaan	e_4	Alfiyah, Ana, Annindiya, Brenda, Cindy, Evi, Fatma, Reta, Viona, Zuva	10
20	Pengantar Statistika Keuangan	e_5	Alfiyah, Alivia, Ana, Annindiya, Ardit, Aulia, Brenda, Cindy, Evi, Fatma, Linggar, Reni, Reta, Rifa'i, Risma, Viona, Yumna, Zuva	18

Keterangan:

- Jumlah pengisi kuisioner mewakili himpunan semesta (x).
- Vertek mewakili mata kuliah dan nilai keanggotaan diperoleh $\frac{\text{Order Mata Kuliah}}{\text{Himpunan semesta } (x)}$
- Edge mewakili irisan dari setiap mata kuliah dan nilai keanggotaan diperoleh $\frac{\text{Order Irisan}}{\text{Himpunan semesta } (x)}$

Berdasarkan data diatas kemudian menghasilkan graf fuzzy sebagai berikut:



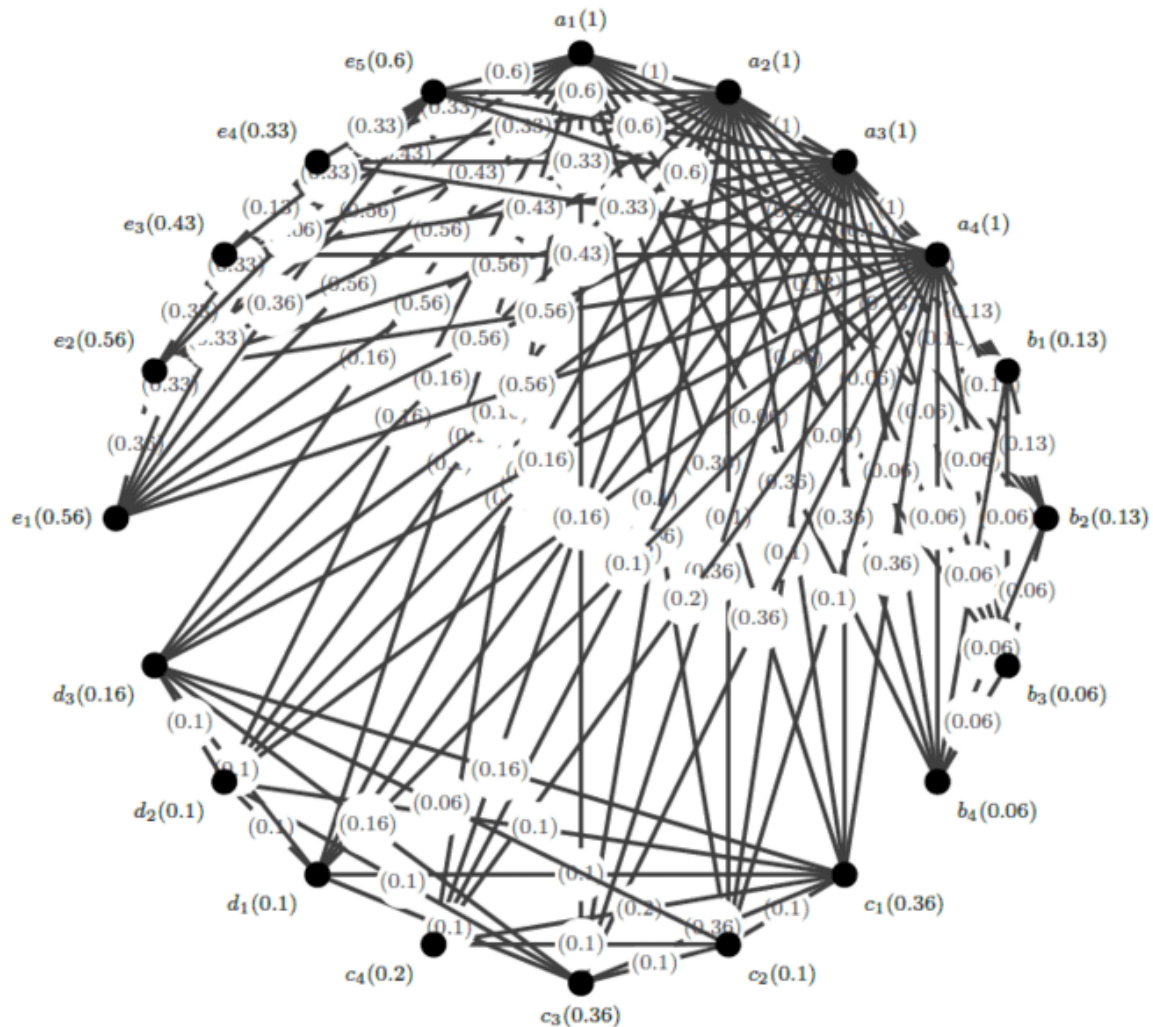
Gambar 3. Graf fuzzy R

Hasil dan Pembahasan

Menggunakan data yang telah dihimpun dan direpresentasikan dalam graf pada Gambar 3 di atas, akan dilakukan pewarnaan fraksional fuzzy pada graf fuzzy R . Proses pewarnaan fraksional menggunakan Algoritma 10 yang dituliskan di atas. Melalui pewarnaan fraksional tersebut diharapkan diperoleh penjadwalan yang meminimumkan jumlah sesi yang dibutuhkan jika ruang yang diperlukan untuk melaksanakan ujian sudah ditentukan.

Langkah 1 Cari vertek *adjacent* kuat pada graf fuzzy R

Langkah 2 Hapus semua *edge* yang menjadi penghubung vertek *adjacent* tidak kuat sehingga menghasilkan graf berikut



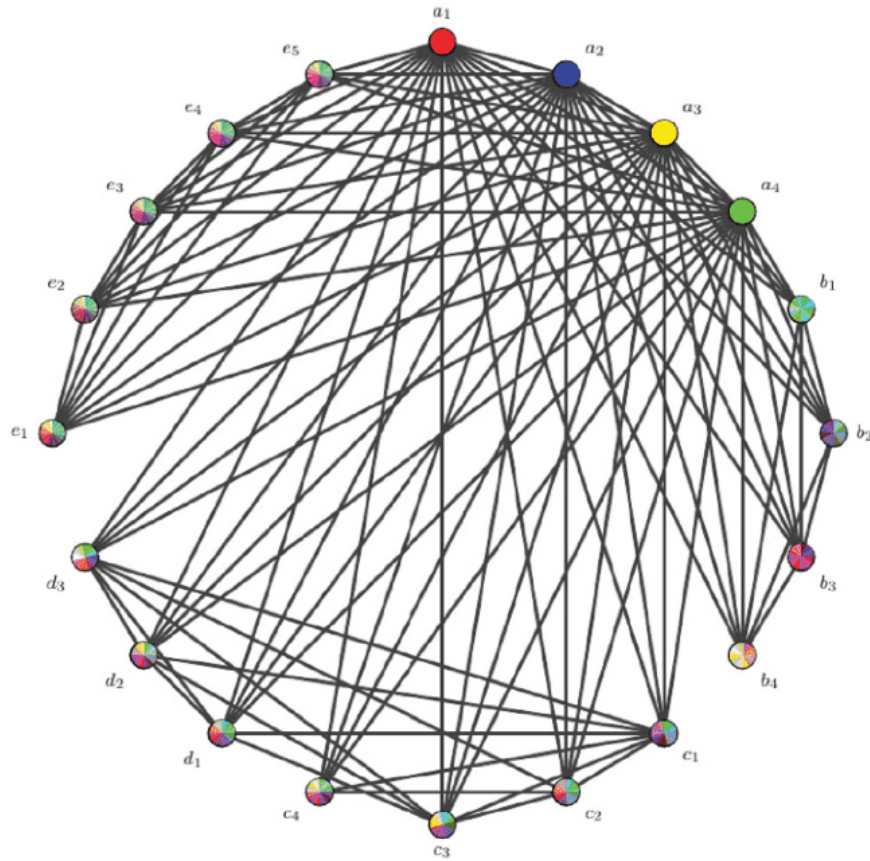
Gambar 4. Graf fuzzy R' yang bersesuaian dengan graf fuzzy R .

Langkah 3 Menentukan himpunan independent pada graf fuzzy R'

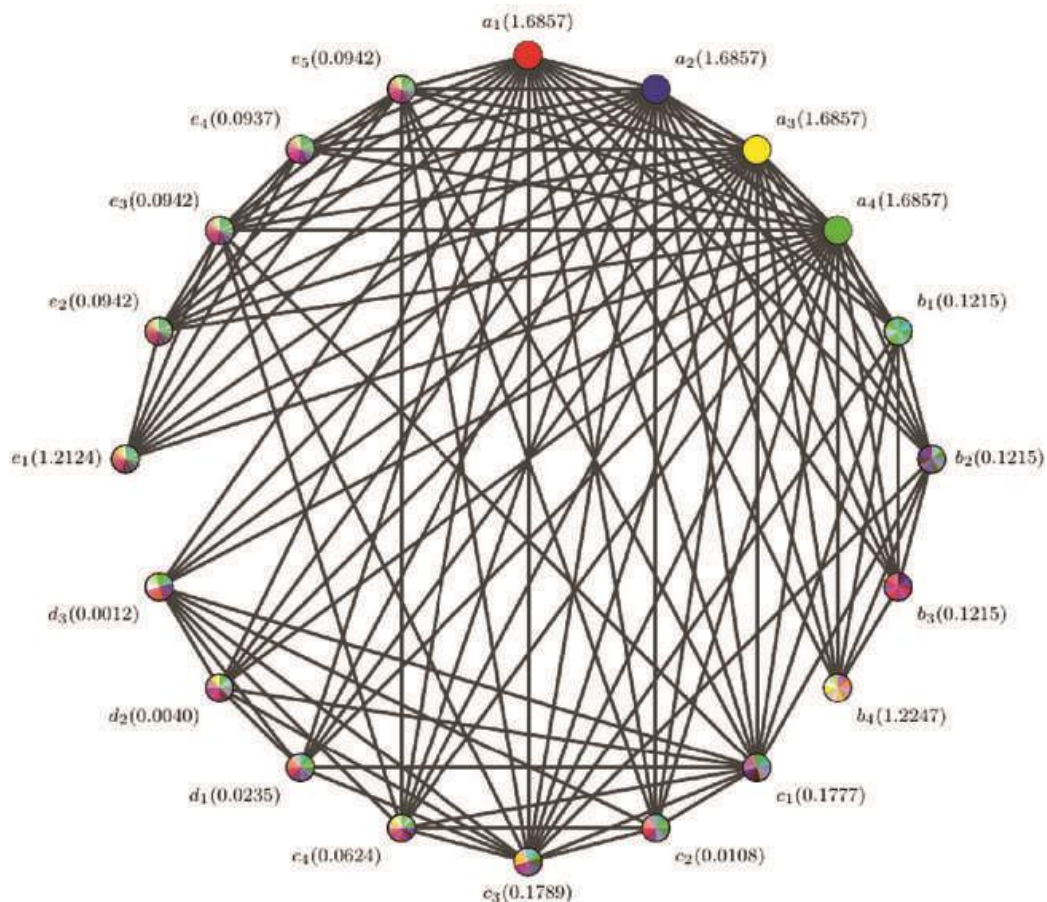
Langkah 4 Berikan warna dari masing-masing himpunan independent. Berdasarkan himpunan independet yang diperoleh pada Langkah 3, kemudian diperoleh pewarnaan pada masing-masing himpunan independen yang direpresentasikan dalam graf pada Gambar 5.

Langkah 5 Menentukan bilangan kromatik fuzzy berdasarkan persamaan warna dari himpunan independent, proses ini dilakukan dengan menggunakan software matlab.

Langkah 6 Terakhir kembalikan *edge* yang menjadi penghubung vertek *adjacent* tidak kuat. Pewarnaan fraksional fuzzy pada graf fuzzy R selesai. Hasil pewarnaan fraksional graf fuzzy R terlihat dalam Gambar 6.



Gambar 5. Pewarnaan graf fuzzy R' berdasarkan himpunan independent.



Gambar 6. Pewarnaan fraksional fuzzy pada graf fuzzy R .

Selanjutnya diasumsikan bahwa ruangan yang tersedia untuk melaksanakan ujian yaitu sebanyak 4, setiap sesi ujian berlangsung selama 2 jam, dan dalam sehari terdapat 2 sesi. Kemudian akan ditentukan jumlah sesi paling minimum untuk penyusunan jadwal ujian. Berikut adalah contoh penyusunan jadwal berdasarkan asumsi tersebut.

Tabel 2 Jadwal Ujian.

No	Mata Kuliah	Waktu Pelaksanaan
1	Uslul Fiqh	Senin, 5 Desember 2022 (07.00 - 09.00)
2	Keuangan Islam	Selasa, 6 Desember 2022 (07.00 - 09.00)
3	Ilmu Falak	Rabu, 7 Desember 2022 (07.00 - 09.00)
4	Matematika Keuangan	Kamis, 8 Desember 2022 (07.00 - 09.00)
5	Pengantar Analisis Fungsional	Senin, 5 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
6	Fungsi Variabel Kompleks	Selasa, 6 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
7	Analisis Vektor	Rabu, 7 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
8	Geometri Analitik	Kamis, 8 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
9	Teori Bilangan	Rabu, 7 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
10	Teori Grup Hingga	Selasa, 6 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
11	Logika Fuzzy	Kamis, 8 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
12	Teori Pengkodean	Senin, 5 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
13	Riset Operasi	Senin, 5 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
14	Matematika Biologi	Selasa, 6 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
15	Teori Permainan	Kamis, 8 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
16	Analisis Regresi	Jumat, 9 Desember 2022 (07.00 - 09.00)
17	Analisis Multivariat	Senin, 5 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
18	Analisis Data	Rabu, 6 Desember 2022 (09.30 - 11.30)
19	Rancangan Percobaan	Jumat, 9 Desember 2022 (07.00 - 09.00)
20	Pengantar Statistika Keuangan	Kamis, 8 Desember 2022 (09.30 - 11.30)

Kesimpulan

Penyusunan jadwal menggunakan pewarnaan fraksional fuzzy menghasilkan solusi optimum yang tidak tunggal. Hal tersebut mungkin terjadi dikarenakan dalam menentukan nilai keanggotaan pada graf fuzzy R masih kurang tepat. Sehingga masih diperlukan metode tertentu untuk menghasilkan pewarnaan fraksional fuzzy dengan hasil yang lebih sesuai.

Referensi

- [1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," *California Information and Contro*, pp. 338-353, 1965.
- [2] A. Kauffman, "Introduction a la Theorie des Sous-ensembles," *Mansson et Cie*, p. 1:1973, 1973.
- [3] A. Rosenfeld, "Fuzzy Graphs, Fuzzy sets and their application," *Academic Press*, pp. 77-95, 2015.
- [4] J. N. Maderson, "Operation on Fuzzy Graphs," *Inf Sci*, Vol. 1 dari 2iii-iv, no. 79, pp. 159-170, 1994.
- [5] M. S. Sunitha, "Fuzzy Graphs Theory : A Survey," *Ann Pure Appl Math*, no. 4, pp. 92-110, 2013.
- [6] A. Nagoorgani, "Isomorphism on Fuzzy Graphs," *Int J Comput Math Sci*, vol. xi, no. 2, pp. 835-831, 2008.
- [7] K. R. Bhutani, "Strong Arcs in Fuzzy Graphs," *Inf Sci*, no. 152, pp. 103-109, 2013.
- [8] M. Ananthanarayanan, "Fuzzy Graph Coloring Using α -cut," *Int J Eng Appl Sci*, vol. x, no. 4, pp. 23-28, 2015.

- [9] K. Radha, "On Lexicographic Product of Two Fuzzy Graphs," *Int J Fuzzy Math Arch*, vol. ii, no. 7, pp. 169-176, 2015.
- [10] S. Samanta, "Fuzzy Planar Graphs," *IEEE Trans Fuzzy Syst*, no. 23, pp. 1936-1942, 2015.
- [11] I. Rosyida, "A New Approach Determining Fuzzy Chromatic Number of Fuzzy Graphs," *J Intell Fuzzy Sets*, no. 28, pp. 2331-2341, 2015.
- [12] I. Rosyida, "Fuzzy Chromatic Number of Union of Fuzzy Graphs: An Algoritma, Properties, and Its Application," *Fuzzy Sets Syst*, 2019.
- [13] T. Mahapatra, "Fuzzy Fractional Coloring of Guzzy Graph with its Application," *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, p. 5771–5784, 2020.
- [14] A. Munandar, *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*, Sleman: Depublish, 2022.
- [15] S. Samanta, "Fuzzy Colouring of Fuzzy Graphs," *Afrika Math*, p. 27:37–50, 2016.