JURNAL FOURIER | Oktober 2020, Vol. 9, No. 2, 43-48
DOI: 10.14421/fourier.2020.92.43-48

ISSN 2252-763X
E-ISSN 2541-5239

Beberapa Sifat Modul Miskin

Arif Munandar[1], Indah Emilia Wijayanti[2]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, Indonesia.
[2]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Bulaksumur, Caturtunggal, Sleman Yogyakarta, Indonesia.

Korespondensi; Arif Munandar, Email: arifdlingo1@gmail.com; Indah Emilia Wijayanti, Email: Ind_wijayanti@ugm.ac.id

Abstrak

Modul miskin adalah modul yang injektif relatif terhadap semua modul semisederhana. Dalam tulisan ini dibahas mengenai eksistensi dan pembentukan modul miskin. Berikutnya dibahas peranan dari modul injektif yang dapat digantikan oleh modul miskin dengan tambahan sifat tertentu.

Kata Kunci: modul miskin; modul injektif; modul semisederhana.

Abstract

A poor module defined to be a module which injective relative only to all semisimple modules. We give the existence of poor modules, how to form poor modules over any rings.The last, we discus about the role of injective module which can be replaced by poor module with some additional properties.

Keywords: poor module; injective module; semisimple module.

Introduction

Modul injektif N atas ring R adalah modul yang mempunyai domain injektivitas seluruh R −modul. Hal ini mengakibatka modul injektif disebut sebagai modul kaya jika dilihat dari domain injektifitasnya. Modul yang tetap injektif namun dengan domain injektivitas paling kecil kemudian disebut sebagai modul miskin.

Modul semisederhana merupakan modul yang istimewa jika dihubungkan dengan domain injektivitas. Hal ini dikarenakan sebarang modul semisederhana selalu menjadi domain injektivitas dari sebarang R −modul. Berdasarkan hal tersebut dapat ditunjukkan bahwa irisan seluruh domain injektifitas dari sebarang R-modul adalah modul semisederhana. Hal ini memotivasi (Alahmadi dkk, 2011) untuk mengkarakterisasi modul miskin yaitu modul yang damain injektivitasnya hanyalah seluruh modul semisederhana.

(Noyan dkk, 2011) meyatakan bahwa sebarang ring mempunyai modul miskin dan membahas beberapa sifat berkaitan dengan hal tersebut. Modul $p-$ miskin yaitu modul miskin versi modul proyektif diteliti oleh (Holson, dkk, 2012). Dari kedua tulisan tersebut terdapat beberapa kesamaan sifat antara Modul p −miskin dengan modul miskin.

Sifat modul-modul injektif dibahas dalam beberapa buku seperti (Bland, 2011), (Wisbauer, 1991), (Anderson dan Fuller, 1974), dan (Lam, 1999). Beberapa sifat modul injektif yang terdapat dalam buku tersebut akan dibuat versi modul miskinnya dengan memberikan syarat tambahan yang diperlukan untuk menjamin keberlakuan sifatnya.

Landasan Teori

Sebarang modul semisederhana selalu menjadi domain injektivitas dari sebarang modul. Konvers pernyataan ini ternyata berlaku, dan menjadi dasar pendefinisian modul miskin.

Teorema 2.1. [1] *Diberikan M adalah $R-$modul, $R-SSMod$ adalah kelas dari semua modul semisederhana kiri atas R, dan $\Im n^{-1}(N)$ adalah kelas domain injektivitas dari modul N, maka*

$$R-SSMod = \bigcap_{N\in R-modul}\Im n^{-1}(N).$$

Bukti. Jelas bahwa sebarang modul semisederhana kiri merupakan domain injektivitas dari sebarang modul kiri atas R, dengan demikian $R-SSMod \subseteq \bigcap_{N\in R-modul}\Im n^{-1}(N)$.

Selanjutnya akan dibuktikan $R-SSMod \supseteq \bigcap_{N\in R-modul}\Im n^{-1}(N)$. Diambil sebarang $P \in \bigcap_{N\in R-modul}\Im n^{-1}(N)$. Dengan demi-kian setiap M modul kiri atas R adalah modul $P-$injektif. Akibatnya setiap $R-$modul M adalah modul $P-$injektif. Dengan kata lain $P \in R-SSMod.$■

Berdasarkan teorema tersebut didefinisikan modul miskin sebagai berikut.

Definisi 2.2. [1] *Diberikan M modul kiri atas R, modul M disebut sebagai modul miskin jika domain injektivitas dari modul M adalah hanyalah seluruh modul semisederhana kiri.*

Contoh 2.3. Modul $\bigoplus_{p\in prima}\mathbb{Z}_p$ atas ring $\mathbb{Z}$ adalah modul miskin.

Contoh 2.4. Modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ atas ring $\mathbb{Z}$ dan sebarang bilangan prima p bukan merupakan modul miskin. Karena $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah modul $\mathbb{Z}_{p^2}$ -injektif, sementara $\mathbb{Z}_{p^2}$ bukan modul semisederhana.

Dalam (Noyan, dkk, 2011) juga dibahas bahwa jumlahan langsung dari sebarang modul miskin dengan sebarang $R-$modul merupakan modul miskin. Hal ini tentu saja akan mempermudah pembentukan modul miskin. Sementara eksistensi dari modul miskin dalam sebarang ring dijamin oleh teorema berikut

Teorema 2.5. [6] *Setiap ring R, mempunyai modul miskin.*

Bukti. Diambil sebarang ring R. Misalkan $\{A_\gamma|\gamma \in \Gamma\}$ adalah himpunan semua kelas-kelas isomorfisma $R-$modul non semisederhana dan siklik. Karena A_γ modul non semisederhana maka terdapat $K_\gamma \subset A_\gamma$ sedemikian K_γ proper submodul essensial dari A_γ. Selanjutnya dibentuk $T = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma$. Misalkan B adalah sebarang modul siklik non semisederhana sedemikian sehingga T adalah $B-$ injektif. Dengan demikian tedapat suatu $\gamma \in \Gamma$ sedemikian sehingga $B = A_\gamma$. Karena B non-semisederhana maka, B mempunyai proper esensial submodul katakan N sedemikian sehingga $N \cong K_\gamma$. Dengan demikian N adalah $B-$injektif, kontradiksi. Jadi B sebarang modul semisederhana dan siklik sedemikian sehingga T modul $B-$injektif, dengan kata lain T modul miskin. ■

Berikutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat modul injektif yang akan dibuat versi modul miskinya. Dimulai sifat yang berkaitan dengan penjumlah langsung yang dituliskan dalam (Lam. 1999) berikut

Teorema 2.6. *Diberikan M dan N modul kiri atas R dengan M submodul. Jika M modul injektif maka M penjumah langsung dari N.*

Bukti. Cukup *jelas* dengan memperhatikan sifat modul injektif. ■

Sifat berikutnya berkaitan dengan barisan eksak yang dituliskan dalam (Bland, 2011) berikut

Teorema 2.7. *Diberikan ring R modul M. Modul M injektif jika dan hanya jika untuk setiap barisan eksak berbentuk*

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \tag{1}$$

maka barisan

$$Hom_R(N_1,M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N_2,M) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Bukti. Mudah dibuktikan dengan menunjukkan bahwa f^* adalah epimorfisma, dijamin dengan M yang merupakan modul injektif. ■

Sifat berikutnya masih berkaitan dengan barisan eksak, sifat ini dalam (Anderson & Fuller, 1974) disebut sebagai Lemman Schaunel untuk modul injektif.

Lemma 2.8. (Lemma Schaunel untuk modul Injektif) *Diberikan sebarang ring dan barisan eksak berbentuk $R-$modul dan $R-$homomorfisma sebagai berikut*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_1 \xrightarrow{p_1} C_1 \longrightarrow 0 \tag{3a}$$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_2 \xrightarrow{p_2} C_2 \longrightarrow 0 \tag{3b}$$

Jika E_1 dan E_2 modul injektif maka $E_1 \oplus C_2 \cong E_2 \oplus C_1$.

Bukti. Mudah dibuktikan dengan memanfaatkan injektifitas dari modul E_1 dan E_2 untuk menunjukkan bahwa barisan $R-$modul dan $R-$homomorfisma

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma} E_2 \oplus C_1 \xrightarrow{\phi} C_2 \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Eksak dan terpisah. ■

Hasil dan Pembahasan

Teorema pertama yang akan dibuat versi modul miskinnya adalah teorema 2.6 yang menyatakan bahwa jika M modul injektif maka M penjumah langsung dari sebarang modul yang memuat M. Kondisi tersebut tidak berlaku dalam modul miskin. Berikut ini adalah contoh dari M modul miskin dan submodul dari N, tetapi tidak menjadi penjumlah langsung dari N.

Contoh 3.1. Dipilih $M = \bigoplus_{p \in prima} \mathbb{Z}_p$, diperhatikan M adalah submodul dari $N = \bigoplus_{p \in prima, p \neq 2} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_4$. Lebih lanjut M modul miskin dan N bukanlah modul semisederhana, maka N bukan domain injektivitas dari modul M. Dengan demikian barisan (5) tidak komutatif, tidak terdapat $h: N \to M$ sedemikian sehingga $h \circ f = id_M$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_M"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Jadi barisan (5) tidak terpisah dan akibatnya M bukan penjumlah langsung dari N.

Contoh di atas memberi gambaran bahwa sifat tersebut dapat berlaku jika N semisederhana, sehingga N dapat menjadi domian injektivitas dari modul M. Berikut ini teorema dalam versi modul miskin.

Teorema 3.2. *Diberikan N modul semisederhana dan M adalah submodul N. Jika M modul miskin maka M penjumah langsung dari N.*

Bukti. Sebagai akibat submodul dari modul semisederhana adalah modul semisederhana maka M dan N modul semisederhana. Sehingga dapat dibentuk diagram sebagai berikut

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_M"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{6}$$

Karena M modul miskin, dan N semisederhana maka N menjadi domain injektivitas dari M . Akibatnya terdapat $h : N \to M$ sedemikian sehingga diagram komutatif.■

Diperhatikan bahwa syarat N merupakan modul semisederhana dan M modul miskin tidak dapat diabaikan sebab tanpa hal tersebut maka N tidak dapat menjadi domain injektivitas dari modul M yang dapat menjamin kekomutatifan diagram (6).

Teorema berikutnya yang berkaitan dengan modul injektif adalah teorema 2.7 yang berkaitan dengan barisan eksak. yang menyatakan bahwa modul M injektif jika dan hanya jika untuk setiap barisan eksak berbentuk

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \tag{7}$$

maka barisan

$$Hom_R(N_1, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N_2, M) \longrightarrow 0 \tag{8}$$

eksak sebagai grup abelian.

Teorema tersebut tidak dapat berlaku jika M adalah modul miskin atas sebarang ring R. Berikut ini contoh yang menjelaskan ketidak berlakuan Teorema tersebut dalam modul miskin.

Contoh 3.3. Sebagai contoh $M = \bigoplus_{p \in prima} \mathbb{Z}_p$ adalah modul miskin. Dipilih $N_1 = \mathbb{Z}_2$ dan $N_2 = \mathbb{Z}_4$ kemudian dibentuk diagram berikut

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z}_4 \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& M &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Dipilih pula $g: \mathbb{Z}_2 \to M$ iklusi. Karena M modul miskin dan $\mathbb{Z}_4$ bukan modul semisederhana maka $\mathbb{Z}_4$ bukan domian injektivitas dari modul M. Dengan demikian tidak terdapat $h \in Hom_R(\mathbb{Z}_4, M)$ yang memenuhi $f^*(h) = g$. Artinya f^* bukan homomorfisma surjektif. Sehingga, jika M modul miskin atas sebarang ring maka barisan (9) belum tentu merupakan barisan eksak sebagai grup abelian.

Teorema tersebut tidak berlaku karena N_2 bukan modul semisederhana yang berarti tidak dapat menjadi domain injektivitas. Dengan demikian, jika ditambahkan syarat N_2 merupakan modul semisederhana, maka teorema tersebut dapat berlaku dalam modul miskin.

Teorema 3.4. *Diberikan ring R dan N_2 modul semisederhana atas R. Modul M miskin jika dan hanya jika untuk setiap barisan eksak berbentuk*

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \tag{10}$$

maka barisan

$$Hom_R(N_1, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N_2, M) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

eksak sebagai grup abelian.

Bukti. Diketahui M modul miskin dan barisan (10) eksak, akan dibuktikan barisan (11) eksak. Dengan kata lain ditunjukkan bahwa f^* adalah epimorfisma. Diambil sebarang $g \in Hom_R(N_1, M)$, karena M modul miskin dan N_2 modul semisederhana, maka N_2 menjadi domain injektivitas dari modul M. Dengan kata lain terdapat $h: N_2 \to M$, sedemikian sehingga $g = h \circ f = f^*(h)$. Jadi f^* epimorfisma.

Sebaliknya diketahui (11) adalah barisan eksak, dengan demikian f^* adalah epimorfisma. Diambil sebarang $g \in Hom_R(N_2, M)$, karena f^* epimorfisma, maka terdapat $h \in Hom_R(N_1, M)$ sedemikian sehingga $g = f^*(h) = h \circ f$. Dengan kata lain diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N_2 \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{12}$$

Dengan demikian M modul miskin. ■

Terinspirasi dari Lemma Schaunel untuk modul injektif, maka kemudian dibuat Lemma Schaunel untuk modul miskin sebagai berikut.

Lemma 3.5. ***Lemma Schanuel untuk Modul Miskin****. Diberikan sebarang ring R, modul semisederhana E_1 dan E_2 serta barisan eksak berbentuk R −modul dan R −homomorfisma sebagai berikut*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_1 \xrightarrow{p_1} C_1 \longrightarrow 0 \tag{13}$$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_2 \xrightarrow{p_2} C_2 \longrightarrow 0 \tag{14}$$

Jika E_1 dan E_2 modul miskin maka $E_1 \oplus C_2 \cong E_2 \oplus C_1$.

Bukti. Diperhatikan bahwa E_1 dan E_2 adalah modul semisederhana, maka M semisederhana. Dibentuk diagram sebagai berikut

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "id_M"] & E_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_2"'] & E_2 \arrow[r, "p_2"'] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{15}$$

dimana masing -masing baris eksak. Karena E_2 miskin, dan E_1 semisederhana maka E_1 menjadi domain injektivitas dari modul E_2 sehingga terdapat $\alpha: E_1 \to E_2$ sedemikian sehingga diagram bagian kiri komutatif, yaitu $\alpha \circ i_1 = i_2$. Lebih lanjut karena i_1 dan i_2 injektif maka α injektif. Kemudian karena diagram eksak maka p_1 surjektif, sehingga setiap $c_1 \in C_1$ terdapat $e_1 \in E_1$ sedemikian sehingga $c_1 = p_1(e_1)$. Berikutnya didefinisikan $\beta: C_1 \to C_2$ dengan definisi $\beta(c_1) = p_2\ (\alpha(e_1))$. Dengan definisi tersebut $\beta(c_1)) = \beta\ (p_1(e_1)) = p_2(\alpha(e_1))$ untuk setiap $e_1 \in E_1$. Dengan kata lain diagram sebelah kanan komutatif.

Selanjutnya dibentuk pemetaan $\gamma: E_1 \to E_2 \oplus C_1$ dengan definisi $\gamma(e) = (\alpha(e), p_1(e))$ dan $\phi: E_2 \oplus C_1 \to C_2$ dengan definisi $\phi(x,y) = p_2(x) - \beta(y)$. Selanjutnya dibentuk barisan R −modul dan R −homomorsima berikut;

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\gamma} E_2 \oplus C_1 \xrightarrow{\phi} C_2 \longrightarrow 0 \tag{16}$$

Diperhatikan bahwa untuk setiap $(\alpha(e), p_1(e)) = (\alpha(f), p_1(f))$maka $\alpha(e) = \alpha(f)$, karena α injektif maka $e = f$. Sehingga γ injektif. Selanjutnya diambil sebarang $x \in C_2$ maka terdapat $e_2 \in E_2$ sedemikian sehingga $p_2(e_2) - \beta(0) = x$. Dengan demikian untuk setiap $x \in C_2$ terdapat $(e_2, 0) \in E_2 \oplus C_1$ sedemikian sehingga $\phi(e_2, 0) = p_2(e_2) - \beta(0) = x$. Jadi ϕ surjektif.

Berikutnya ditunjukkan bahwa $Im\,\gamma = Ker\,\phi$. Diambil sebarang $e_1 \in E_1$, maka $\phi(\gamma(e_1)) = \phi(\alpha(e_1), p_1(e_1)) = p_2(\alpha(e_1)) - \beta(p_1(e_1)) = 0$. Dengan demikian $Im\,\gamma \subseteq Ker\,\phi$. Selanjutnya diambil sebarang $(a,b) \in Ker\,\phi$, sehingga $p_2(a) = \beta(b)$. Karena p_1 surjektif maka terdapat $e_1 \in E_1$ sedemikian sehingga $p_1(e_1) = b$. Misalkan $a_0 = \alpha(e_1)$, karena diagram sebelah kanan komutatif maka

$$p_2(a_0) = p_2\ (\alpha(e_1)) = \beta(p_1(e_1)) = \beta(b) = p_2(a)$$

sehingga $a - a_0 \in Ker\,p_2 = Im\,i_2$. Dengan demikian terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga

$$\alpha(i_1(m)) = i_2(m) = a - a_0$$

dipilih $e = e_1 + i_1(m)$, maka $\alpha(e) = \alpha(e_1) + \alpha(i_1(m)) = a_0 + a - a_0 = a$

$$p_1(e) = p_1(e_1) + p_1(i_1(m)) = p_1(e_1) = b$$

Dengan demikian $(a, b) = (\alpha(e), p_1(e)) \in Im\,\gamma$, sehingga $Ker\,\phi \subseteq Im\,\gamma$. Jadi barisan (16) eksak.

Karena E_1 modul miskin dan semisederhana maka C_1 semisederhana dan $E_2 \oplus C_1$ semisederhana, sehingga $E_2 \oplus C_1$ menjadi domian injektivitas dari E_1. Akibatnya barisan (16) terpisah. Jadi $E_2 \oplus C_1 \cong E\_1 \oplus C_2$. ■

Peranan dari modul semisederhana E_1 dan E_2 tidak dapat diabaikan. Diperhatikan bahwa jika modul E_1 tidak semisederhana, maka E_1 tidak dapat menjadi domain injektivitas dari E_2 yang berakibat Diagram sebelah kiri dari (15) tidak komutatif. Sementara semisederhananya modul E_2 dan C_1 menyebabkan jumlahan langsung antara keduanya menjadi domian injektivitas dari modul E_1 sehingga barisan eksak (15) dapat terpisah.

Kesimpulan

Ring semisederhana mempunyai pengaruh yang besar pada modul miskin. Di antaranya adalah semua modul miskin yang terbentuk atas ring semisederhana adalah modul semisederhana, submodul dan modul faktor dari modul miskin atas ring semisederhana juga merupakan modul miskin. Lebih lanjut ring semisederhana menyebabkan modul miskin sama dengan modul injektif. Akibatnya sifat-sifat yang berkaitan dengan modul injektif berlaku pula dalam modul miskin.

Referensi

[1] **Alahmadi. A. N., Alkan, M.** and **Lopez-Permouth, S.**, 2010, Poor Modules: *The Opposite of Injectivity*, Glasgow Math Journal, pp. 7-17.
[2] **Anderson, F.W. and Fuller, K. R., 1974, Rings and Categories of Modules, SpringerVerlag, New York**
[3] **Bland, P.E.**, 2011, *Rings and their modules*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin/Newyork.
[4] **Holston, C., Lopez-Permouth, S.** and **Orhan, E.N.**, 2011, *Rings Whose Modules have Minimal or Maximal Projectivity Domain*, Journal of Pure and Applied Algebra, pp. 673-678.
[5] **Lam, T. Y.**, 1999, *Lectures on Modules and Rings*, Springer, New York.
[6] **Noyan, E., Lopez-Permouth, S.** and **Sokmez, N.**, 2011, *Ring Whose Modules have Maximal or Minimal Injectivity Domains*, Journal of Algebra, pp. 404-417.
[7] **Wisbauer, R.**, 1991, *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Publishers.